David Molitor
1908.

DIE PRAXIS

DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

FÜR DIE

BEDÜRFNISSE DER ANFÄNGER

BEARBEITET.

DIE PRAXIS

DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

FÜR DIE

BEDÜRFNISSE DER ANFÄNGER

BEARBEITET VON

W. v. FREEDEN,

Oberlehrer der Mathematik und Physik, Rector der Grossherzogl. Oldenburgischen Navigationsschule.

ERSTER THEIL.

Elementare Darstellung der Methode nebst Sammlung vollständig berechneter physikalischer, meteorologischer, geodätischer und astronomischer Aufgaben, welche auf lineare und transcendente Gleichungen führen.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 6 3.

VORWORT.

Unsere Literatur ist gewiss nicht arm an Darstellungen der Methode der kleinsten Quadrate. Wir besitzen Bearbeitungen derselben von ihrem eigentlichen Erfinder Gauss, und von seinen ebenbürtigen Nachfolgern Encke, Bessel u. a. m., welche den höchsten Anforderungen der Wissenschaft entsprechen, und nicht allein die obersten Principien der Methode beleuchten, sondern auch eine reichhaltige Fundgrube abgeben für gewisse praktische Rücksichten, welche bei den mühsamen numerischen Rechnungen mit Vortheil können genommen werden. — Nach jenen Arbeiten müssen genannt werden die Entwickelungen der Methode von Gerling, Reuschle, Dienger, Wittstein, welche bei aller wissenschaftlichen Strenge der Darstellung schon mehr sich den nächsten Bedürfnissen der Praxis zuwenden und durch Vorführung einer Reihe von Beispielen dem Anfänger den Weg zu zeigen sich bemühen.

Nun ist keine Frage, dass die letzten Jahrzehnte mit der ungemeinen Vertiefung der naturwissenschaftlichen Studien und ihrer Anknüpfung an die Bedürfnisse des Lebens der Methode der kleinsten Quadrate immer neue Freunde auch aus nicht fachwissenschaftlichen Kreisen zugeführt haben, welche das stets wachsende Beobachtungs-Material zu bewältigen und nutzbringend zu machen bemüht sind. Es ist aber nicht zu verwundern, dass es in manchen Berufszweigen des bürgerlichen Lebens Männer giebt, welche, ohne der Theorie der Methode tiefere Studien zuwenden zu können oder zu wollen, dennoch von ihrer Praxis gern Notiz nehmen, von ihren Schlüssen Nutzen ziehen möchten, sowie andererseits auch selbst der Mathematik Beflissene nicht ohne Vortheil erst die mühsamen praktischen Arbeiten durchmachen, bevor sie sich zum ernsteren Studium der ganzen Theorie entschliessen.

Vielleicht ist es mir gelungen, durch meine elementare Darstellung der Methode eine Lücke in unserer Literatur auszufüllen, indem ich einzig die Bedürfnisse des Praktikers und Anfängers zu Rathe zog und besonders die ersten Schwierigkeiten hinsichtlich der allgemeinen Form der Function und die späteren der numerischen Rechnung eingehend zu heben versuchte. Sollte sich meine Hoffnung bestätigen, so werde ich in einer zweiten bald folgenden Abtheilung die weitere Entwickelung der Methode, die Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Resultate u. s. w. vorführen und die Beispielsammlung angemessen vervollständigen durch Aufnahme statistischer, chemischer etc. Aufgaben, soweit meine Beobachtungen reichen und fremde mir zugänglich werden.

Elsfleth, den 31. December 1862.

Der Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

I. Allgemeine Einleitung:

Was man unter der Methode der kleinsten Quadrate versteht.

1. Beobachtern ist die Thatsache bekannt, dass die Genauigkeit unserer Wahrnehmungen stets durch Fehler beeinträchtigt wird, welche ihren Grund in Irrthümern unserer Sinne, — Gesichts-, Gehörfehler besonders — ferner in Veränderungen der physischen Gegenstände um uns, oder in Mängeln der gebrauchten Instrumente u. s. w. haben. Kehren diese Fehler beständig und in gleicher Grösse wieder, sind also constant, wie man zu sagen pflegt, wie z. B. häufig die Indexfehler bei Theilungen der Gradbögen, oder der Gang der Uhren für eine gewisse Zeit u. s. w., so sind sie nur schädlich, so lange man sie nicht kennt. Von ihnen sind zu unterscheiden die zufälligen Fehler, welche bei derselben oder verschiedenen Beobachtungen verschieden ausfallen, nie ganz verschwinden, und im besten Fall nur auf ein geringstes Maass vermindert werden können. Daneben trüben noch Versehen mancherlei Art die Richtigkeit der angestellten Beobachtungen; da man indessen meistens sich ihrer sowohl erwehren als der constanten Fehler vergewissern kann, so ist es hauptsächlich die zweite Klasse von Fehlern, die sogenannten zufälligen, welche, unter dem speciellen Namen von Beobachtungsfehlern begriffen, das Nachdenken herausfordern, wie man auch sie möglichst unschädlich machen könne.

2. Man stellt Beobachtungen zu dem Zwecke an, um irgend eine unbekannte Thatsache, z. B. die Grösse eines Winkels, das specifische Gewicht eines Körpers u. s. w. zu erfahren. Ergäbe sich aus der Beobachtung unmittelbar oder mittelbar die genaue Thatsache, so wäre die Sache damit abgemacht; da aber jede

Beobachtung als fehlerhaft anzusehen ist, so wird nicht die genaue Thatsache, deren Werth durch S bezeichnet werden mag, das Resultat der Beobachtung sein, sondern ein Werth $S \pm n$, indem im Allgemeinen einzuräumen ist, dass die Beobachtungsfehler n die Grösse der Unbekannten sowohl zu vermehren als zu vermindern im Stande sind. Um nun aus einzelnen für sich gleich unzuverlässigen Beobachtungen doch glaubwürdige Ergebnisse zu erhalten, hat man schon früh zu einem noch fortwährend üblichen Auskunftsmittel gegriffen, welches darin besteht, dass man die Beobachtungen vervielfältigt, und dadurch zunächst die Fehler hindert, einseitig zu wirken, vielmehr sich die Aussicht eröffnet, dass einer gewissen Menge von positiven Fehlern andere negative in voraussichtlich ungefähr gleicher Grösse gegenüberstehen werden. Dabei erlaubte man sich freilich in frühern Zeiten die Willkürlichkeit, dass man aus der ganzen Reihe von Beobachtungen einzelne herauswählte, welche unter besonders günstigen Umständen angestellt zu sein schienen, und nun unter Beseitigung der übrigen diese Beobachtungen allein der Ermittelung der wirklichen Thatsache zu Grunde legte. Weil indessen das Urtheil über die Zuverlässigkeit einer Beobachtung selbst wieder trügerisch sein wird und es sich empfiehlt, um möglicher Weise alle Fehler zu erfahren, Beobachtungen unter möglichst verschiedenen, also schlecht zu vergleichenden Umständen anzustellen, so ist jenes Verfahren längst als unwissenschaftlich beseitigt, und bei der Ausbeutung der Beobachtungen nur die Methode als die richtige anerkannt, welche, unter Voraussetzung gleicher Sorgfalt bei der Anstellung, sämmtliche Beobachtungen zur Rechnung heranzieht.

3. Diese wird natürlich bald mehr, bald weniger verwickelt. Am einfachsten gestaltet sie sich, wenn der Werth der unbekannten Grösse, z. B. eines Winkels, unmittelbar schon durch die einzelnen gleich unzuverlässigen Messungen angedeutet ist, und nur die Beobachtungsfehler es verhindern, dass bei jeder Messung derselbe Werth erhalten wird. Z. B. ergeben sämmtliche Messungen als gesuchte Winkelgrösse n Grade m Minuten, daneben aber nach einander 41, 40, 40, 39, 38, 38, 37, 35, 35, 34, 34, 33, 33, 32, 31 Sekunden, so bleibt die wirkliche Grösse des Winkels noch zu ermitteln.

Die von Alters her geläufige und mit der demnächst zu entwickelnden Theorie im Einklange stehende Methode schreibt dann vor, das arithmetische Mittel sämmtlicher Beobachtungen zu nehmen, wodurch man den gesuchten Winkel $= n$ Grade m Minuten 36 Sekunden erhält. — Oder man habe bei einer Flurvermessung die drei Winkel eines ebenen Dreiecks einzeln gemessen und die Summe kleiner oder grösser als 180^0 gefunden: man wird dazu geneigt sein, und die Theorie bestätigt die Richtigkeit des Verfahrens, dass man die Differenz auf alle drei Winkel zu gleichen Theilen vertheilt.

4. Das Princip des arithmetischen Mittels ist als richtig angenommen und benutzt, lange bevor es wissenschaftlich begründet und seine Anwendbarkeit im gegebenen Fall nachgewiesen war. Was es besonders empfiehlt, ist zunächst die Einfachheit der zu Grunde liegenden Anschauungen und des auf sie begründeten Verfahrens, sodann die gleichmässige Würdigung der sämmtlichen gleich unzuverlässigen Beobachtungen, wodurch es möglich wird, einen Mittelwerth als Werth der gesuchten Grösse zu finden, dessen Differenzen von den einzelnen Beobachtungen zusammengenommen gleich Null werden. Denn bei dem Mittelwerth von 36 Sekunden erhielte man als Unterschiede

einerseits $+5, +4, +4, +3, +2, +2, +1$ zusammen $= +21$
andrerseits $-1, -1, -2, -2, -3, -4, -5$ zusammen $= -21$

und die Summe dieser Differenzen, welche offenbar eben nichts anderes als die gemachten Beobachtungsfehler darstellen, wird Null.

5. Indessen so einfach wie der genannte sind sehr viele der hieher gehörigen in der Praxis vorkommenden Fälle nicht; vielmehr stellen sich bei ihnen, wie wir alsbald weiter sehen werden, der directen Anwendung des arithmetischen Mittels ganz eigenthümliche Schwierigkeiten in den Weg, und so war Veranlassung geboten, sich nach andern Methoden der Auffindung des richtigen Werths der Unbekannten umzusehen. Der oben genannte Fall z. B. enthält die wiederholte Messung eines einzigen Winkels von einem gegebenen Punkte aus. Der gewöhnliche Fall ist aber der, dass von einer Station aus eine ganze Reihe anderer Punkte, 1, 2, 3, 4, 5 .... eingeschnitten werden, und man nun nicht allein die Winkel zwischen den zunächst auf einander folgenden Örtern, also $< 1 . 2$, $< 2 . 3$, $< 3 . 4$, mit beliebigen Repetitionen vielleicht, misst, sondern auch allerlei Combinationen der Winkel, also $< 1 . 3$, $< 1 . 5$, $< 2 . 4$ etc. sich durch directe Ablesung verschafft. Dann bewirken die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, dass z. B. $< 1 . 4$ nicht $= < 1 . 2 + < 2 . 3 + < 3 . 4$ erhal-

ten wird, sondern um ein Gewisses grösser oder kleiner, ebenso $< 2 . 4$ nicht $= < 2 . 3 + < 3 . 4$ u. s. f. Stellt man dann aber alle Beobachtungen zusammen, so wird man auf eine Anzahl Gleichungen geführt, in denen die beobachteten Winkelwerthe nebst den etwaigen Repetitionszahlen die Constanten — in anderen Fällen natürlich gewisse andere Werthe, von denen man die Unbekannten abhängig weiss —, die gesuchten einzelnen Winkel die Unbekannten bilden. Bei der Aufstellung der Gleichungen wird aber einer der drei möglichen Fälle eintreten, je nach der Ausdehnung, in welcher man die Beobachtungen hat anstellen können: entweder führen die Beobachtungen auf gerade soviel Gleichungen, als Unbekannte da sind; dann zeigt die gewöhnliche Algebra, wie die Gleichungen zu lösen, die Unbekannten zu finden sind; oder die Beobachtungen gestatten nicht, so viel Gleichungen zu bilden, als Unbekannte da sind, weil sie aus irgend einem Grunde unvollständiger geblieben sind als im ersten Fall; dann ist und bleibt die Aufgabe und ihre Lösung eine unbestimmte; oder endlich drittens die Beobachtungen führen, wie schon oben angedeutet, auf mehr Gleichungen, als Unbekannte da sind. Dieser letzte Fall, n Gleichungen mit nur $n - m$ Unbekannten zu lösen, ist derjenige, welcher uns hier eigentlich beschäftigen soll; zu seiner Lösung dient die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate.

6. Aus denselben Gründen, warum wir vorhin es als unpassend bezeichnet haben, einzelne Beobachtungen zu verwerfen, darf man jetzt nicht etwa einzelne Gleichungen ausscheiden, um so etwa die Anzahl der Gleichungen auf die Anzahl der Unbekannten zu reducieren. — Es bliebe also vielleicht nur übrig, wenn n Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten zur Lösung gegeben sind, jeweilig m Gleichungen bei Seite zu stellen und aus den übrigen $n - m$ Gleichungen sich Werthe der Unbekannten im gewöhnlichen Eliminationsverfahren zu verschaffen. Da aber $n - m$ Gleichungen aus einer Anzahl von n Gleichungen sich

$$\frac{n \,.\, (n-1)\,(n-2) \,.\,.\,.\,.\, (m+1)}{(n-m)!} \text{ mal zusammenstellen lassen,}$$

so würde man ebenso viele Gruppen von Werthen der Unbekannten erhalten, als Combinationen der Gleichungen möglich waren; vergleicht man nun aber die erhaltenen Werthe der Unbekannten in den verschiedenen Gruppen mit einander, so zeigt die Erfahrung, dass gerade wegen der durch die Beobachtungsfehler unrichtig gewordenen Constanten der ursprünglichen Gleichungen die berechneten Werthe der Unbekannten um mehr oder minder von einander abweichen, je nach der Gruppe von Gleichungen, aus der sie berechnet sind. Keins von allen erhaltenen Systemen von Werthen wird, substituiert in die vorhandenen Gleichungen, dieselben sämmtlich befriedigen, wie das geschieht, wenn man aus n Gleichungen n Unbekannte bestimmt; vielmehr werden, wenn man sich unter M_1, M_2, M_3 .... die aus der Beobachtung, unter F_1, F_2, F_3 .... die aus der Substitution hervorgegangenen Werthe der Functionen der Unbekannten vorstellt, Differenzen von der Grösse $F_1 - M_1$, $F_2 - M_2$, $F_3 - M_3$ ... andeuten, dass die berechneten Werthe der Unbekannten nicht als unbedingt richtig anzusehen sind. Soviel leuchtet indessen sofort ein, dass man Recht hat, demjenigen System von berechneten Werthen der Unbekannten einen höheren Grad von Glaubwürdigkeit beizulegen, durch welches die übrig bleibenden Differenzen von der Form $F - M$ im Allgemeinen kleiner werden, und dass man befugt ist, in einer allerdings noch näher festzustellenden Weise, die übrig bleibenden Differenzen oder Fehler, wie man sie gewöhnlich nennt, als Kennzeichen zu benutzen, in wie weit man sich dem wahren Werthe der Unbekannten genähert habe.

7. Wären zuvörderst die übrig bleibenden Fehler einzeln gleich Null gewesen, wie sich die Sache bei n Gleichungen mit n Unbekannten immer stellt, so waren die Resultate der Lösung absolut richtige. Wenn sie nun aber einzeln nicht Null sind, vielmehr im positiven und negativen Sinn sich von der Null entfernen, und man nun in der Abweichung von der Null ein Kriterium der Zuverlässigkeit der berechneten Werthe der Unbekannten finden will, so ist das Princip festzustellen, nach welchem dabei verfahren werden muss. Abgesehen von einigen bezüglichen Vorschlägen des gelehrten Paters Boscowich, so hat zuerst Laplace bei Gelegenheit der Untersuchungen über Form und Grösse des Erdmeridians eine Methode entwickelt, durch welche er unter allen möglichen Systemen von Werthen der Unbekannten das der Wahrheit zunächst kommende finden zu können glaubte. Er entwickelte sie im zweiten Bande der Mechanik des Himmels, im 39sten und 40sten Lehrsatz des fünften Capitels im dritten Buche, wo er verlangt: „erstens dass die Summe der Fehler, mit ihren zugehörigen Vorzeichen addiert, gleich Null, und zweitens, dass die Summe dieser Fehler, wenn man sie sämmtlich positiv setzt, ein Kleinstes

sei.“ Ueber die Resultate, welche er mit Hülfe dieses Princips in Betreff des Erdmeridians erhält, werden wir weiter unten einige Mittheilungen machen, indem wir sie mit den aus anderen Principien hergeleiteten Resultaten zusammenstellen; das Princip von Laplace selbst ist nicht lange nachher schon als unhaltbar erkannt. Um zunächst jenes Princip an einem Zahlenbeispiel zu erproben, so seien die Ergebnisse der Messung z. B. die Grösse eines Winkels n Grade m Minuten p Sekunden, und ausserdem noch 0,41, 0,40, 0,40, 0,39, 0,38, 0,38, 0,37, 0,35, 0,35, 0,34, 0,34, 0,33, 0,33, 0,32, 0,31 Sekunden; setzt man nun als wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Grösse des Winkels ausser den unbestreitbaren Graden, Minuten und vollen Sekunden, 0,36 Sekunden, so würde die Summe der übrig bleibenden Fehler mit ihren Vorzeichen addiert, gleich Null werden, während die Fehler, sämmtlich positiv genommen, zur Summe 42 geben. Hätte man indessen 0,35 Sekunden als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten angenommen, so wäre die Summe der Differenzen ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen nur 41 geworden, während die algebraische Summe der Fehler jetzt $+ 28 - 13 = + 15$ giebt. In noch höherem Grade unbestimmt würde die Wahl des passendsten Werths der Unbekannten im folgenden Beispiele werden. Gesetzt, die eine der Unbekannten, z. B. p, sei bestimmt zu $n + 33$, $n + 35$, $n + 40$, $n + 47$, wo die Ziffern vielleicht wieder die Sekunden vorstellen mögen, um welche die Resultate noch von einander abweichen, und man wollte nun einen Mittelwerth wählen, so dass die Summe der übrig bleibenden Fehler ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen ein Kleinstes werde, so würde nicht allein das arithmetische Mittel $n + 38,75$, sondern auch $n + 35$, $n + 36$, $n + 37$, $n + 38$, $n + 39$, $n + 40$ alle als Summe der übrig bleibenden Fehler gleichviel, nämlich 19 geben; jene Werthe aber für gleich zulässige Werthe der Unbekannten zu erklären, würde eine Ungereimtheit sein. — Da sich endlich zeigen lässt, dass nach jenem Princip im Grunde nur genau soviel Gleichungen wirklich bei der Bestimmung der Unbekannten vertreten werden, als Unbekannte da sind, die übrigen Gleichungen aber nur nebenher auf die Wahl der Werthe influieren, so hat man das Princip von Laplace mit Recht längst verlassen.

8. Am wirksamsten ist bekanntlich Gauss jenem Princip der kleinsten Summe der übrig bleibenden Fehler entgegen ge-

treten, dadurch dass er ein neues, jetzt allgemein als das praktisch beste angenommene, und theoretisch als richtig erwiesenes Princip an die Stelle des früheren setzte. Nicht allein dass er damit das auch unmathematische Verfahren des Zeichenwechsels der übrig gebliebenen Fehler ein für allemal beseitigte, ferner keine Zweifel übrig liess, welches System von Werthen der Unbekannten am besten sämmtlichen Gleichungen Genüge leiste: das Hauptverdienst der Gauss'schen Methode, nach welcher die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler als Kriterium für die Annäherung an den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten angenommen wird, besteht darin, dass sie, in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Theorie, dem bis dahin vernachlässigten Umstande Rechnung trägt, dass die Beobachtungsfehler nicht im einfachen, sondern im quadratischen Verhältnisse ihrer Grössen unwahrscheinlich sind. Gilt schon unter Beobachtern für ausgemacht, dass gewisse Fehlergrössen geradezu unmöglich sind, so müssen grössere Fehler auch im höhern Verhältniss als dem directen ihrer Grössen unwahrscheinlich sein als kleinere; nach Gauss setzt man die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse 8 zu begehen gegenüber einem Fehler von der Grösse 4, nicht $= 1/_2$, sondern nur $= 1/_4$. Da höhere Potenzen, z. B. die 4ten, 6ten der Grössenverhältnisse der Fehler, welche unter Umständen zulässig sein können, die Rechnungen auf unverhältnissmässige Weise erschweren, so ist Gauss bei den zweiten stehen geblieben, und ist nach ihm also die kleinste Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Maassstab für die beste Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der Unbekannten. Da hier nicht der Ort ist, weder die Geschichte der Gauss'schen Untersuchungen von dem Jahre 1795 an, wo er zuerst durch die Kritik einer Reihe Lösungen, welche Lambert über hierher gehörige Aufgaben gegeben, auf seine Methode geführt wurde, bis zu der glänzenden Bestätigung der Richtigkeit und Zweckmässigkeit derselben bei Gelegenheit der Berechnung der Bahn der eben entdeckten Ceres 1801 zu verfolgen, noch auch die folgenden theoretischen Untersuchungen in seinen und seiner Nachfolger Schriften wiederzugeben, so möge das Vorstehende zur Einführung genügen; wir wenden uns gleich zu dem eigentlichen Zweck dieser Schrift, Anfängern zunächst die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate an ausführlich durchgerechneten Beispielen zu erläutern.

II. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben, welche auf lineäre Gleichungen führen.

9. Bevor gezeigt werden kann, wie man die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem kleinsten Werthe herabzudrücken vermag, bedarf der in No. 6 des vorigen Abschnitts erhaltene Ausdruck für dieselben, $F - M$, einer nähern Erläuterung. Da dort gesagt wurde, dass man sich unter F einen der Werthe vorstellen möge, welchen die Function nach Substitution eines der Systeme von Werthen der Unbekannten annähme, welche man durch Combination der gegebenen Gleichungen sich verschaffen könne, so könnte es scheinen, als ob wirklich erst eine Lösung der gegebenen Gleichungen in solcher Weise bewerkstelligt werden müsse, um dann vielleicht erst das Verfahren anzuwenden, durch welches die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum gemacht würde.

Nun aber leuchtet ein, dass jene Werthe von der Form $F - M$ nur dann die wirklichen Fehler bedeuten, wenn man sich unter F den einen, wahren, Werth der Function, nicht aber die aus der Substitution hervorgegangenen, möglichen Falls vielfach verschiedenen Werthe derselben vorstellt. Letztere sind vielmehr nur von ganz sekundärer Bedeutung, und werden als Näherungswerthe allerdings häufig gebraucht, dann aber auf kürzerem Wege gefunden; dafür aber ist freilich der wahre Werth der Function gerade unbekannt, und ihr durch Beobachtung erhaltener Werth notorisch fehlerhaft. Wir werden indessen bald sehen, dass die folgende Entwickelung es umgeht, den wahren Werth der Function F, in Zahlen ausgedrückt zu kennen, und demungeachtet die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

10. Die äussere Form der Functionen ist natürlich je nach den Umständen eine höchst verschiedene. Sind z. B. Horizontalwinkel beobachtet, indem man von einer Richtung $A0$ aus eine Reihe von Oertern 1, 2, 3, 4 eingeschnitten hat, und man betrach-

tet die Winkel 0—1, 0—2, 0—3, 0—4, die wir der Kürze halber mit p, q, r, s bezeichnen wollen, als die Unbekannten, so ergeben Messungen der Winkel

0—1	mit dem abgelesenen Werth M_1, die Gl.	$M_1 = p$
1—2	„ „ „ „ M_2, „ „	$M_2 = -p + q$
0—2	„ „ „ „ M_3, „ „	$M_3 = q$
1—3	„ „ „ „ M_4, „ „	$M_4 = -p + r$
2—3	„ „ „ „ M_5, „ „	$M_5 = -q + r$

u. s. f. Gleichungen, oder Functionen der p, q, r, in welchen allerdings die p, q, r nur einen einzigen, wahren Werth haben, die fehlerhaften Werthe M_1, M_2 etc. aber bewirken, dass dieser wahre Werth nicht ohne Weiteres erkannt werden kann. Drückt man nun die wahren Werthe p, $-p+q$, q, $-p+r$, $-q+r$ ... nach einander durch F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 ...... aus, so bedeuten $F_1 - M_1$, $F_2 - M_2$, $F_3 - M_3$ etc. die wirklich gemachten Fehler. Man sucht nun Werthe von p, q, r, s, welche dem wahren Werthe so nahe kommen, dass die Quadratsumme der dann noch übrig bleibenden Fehler so klein als möglich werde.

In einem andern Fall ist vielleicht eine Unbekannte abhängig von gewissen Constanten und einer Function eines gewissen Winkel α, und ergeben die Beobachtungen verschiedene Werthe, wenn sich der Winkel ändert. Man würde so auf Gleichungen geführt von der Form

$$M_1 = p + q \sin. \alpha_1$$
$$M_2 = p + q \sin. \alpha_2$$
$$M_3 = p + q \sin. \alpha_3 \text{ u. s. f.}$$

Es ist wieder möglich, den p und q solche Werthe zu geben, dass die Grössen der Functionen $p + q \sin. \alpha$ oder allgemein F so ausfallen, dass $(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 +$ .... eine möglichst kleinste Summe geben, und man darf sich überzeugt halten, dass man mit diesen Werthen für p und q ihre wahren Werthe so nahe erreicht habe, als überhaupt die vorliegenden Beobachtungen es gestatten.

11. Auf welche Weise man nun die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum machen könne, zeigt der bekannte Satz der Differentialrechnung, nach welchem die Differentialverhältnisse der Function, die man zu einem Minimum machen will, in Bezug auf jede der zu bestimmenden Grössen einzeln gleich Null zu setzen sind. Hier soll eine Function der Unbekannten p, q, r, ..., nämlich

$$(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 + \cdots$$

zu einem Minimum gemacht werden: man hat also die partiellen Differentialquotienten dieser Summe gleich Null zu setzen, und erhält unter Wegwerfung des gleichen Factors 2 die Gleichungen

$$(F_1 - M_1)\frac{dF_1}{dp} + (F_2 - M_2)\frac{dF_2}{dp} + (F_3 - M_3)\frac{dF_3}{dp} + \ldots\ldots = 0$$

$$(F_1 - M_1)\frac{dF_1}{dq} + (F_2 - M_2)\frac{dF_2}{dq} + (F_3 - M_3)\frac{dF_3}{dq} + \ldots\ldots = 0$$

$$(F_1 - M_1)\frac{dF_1}{dr} + (F_2 - M_2)\frac{dF_2}{dr} + (F_3 - M_3)\frac{dF_3}{dr} + \ldots\ldots = 0$$

u. s. f. Da man nun solcher Gleichungen offenbar so viele bekommt, als Unbekannte da sind, so wird man diese dann nach dem gewöhnlichen Eliminationsverfahren aus ihnen entwickeln können, womit die Lösung der Aufgabe, d. h. die Auffindung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten zunächst als vollführt anzusehen ist. Da alle übrigen Abkürzungen etc. der Rechnungen am besten an wirklichen Beispielen zu zeigen sind, so wenden wir uns sofort zu der weitern Behandlung derjenigen Aufgaben, welche auf Gleichungen dieser Art führen, um ihnen späterhin die Behandlung der Aufgaben folgen zu lassen, welche auf transcendente Functionen führen.

A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.
Arithmetisches Mittel.

12. Gesetzt, man habe zur Ermittelung des Werthes nur einer Unbekannten, die mit p bezeichnet werden möge, eine Reihe von n gleich unzuverlässigen Beobachtungen dieses Werthes angestellt, deren Ergebnisse M_1, M_2, M_3 .... M_4 seien. Die zu lösenden Gleichungen wären dann

$$M_1 = p$$
$$M_2 = p$$
$$M_3 = p$$

u. s. f. F sei der der Wahrheit zunächst kommende Werth von p, so hat man nach No. 11 als Bedingungsgleichung, dass die Summe der Quadrate der $F - M$ ein Minimum werde, die Gleichung

$$(F - M_1) + (F - M_2) + (F - M_3) + (F - M_4) \ldots\ldots = 0,$$

also

$$F = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \ldots\ldots}{n} = p$$

mit welcher Gleichung offenbar ausgesprochen ist, dass der richtigste Werth für p das arithmetische Mittel aus sämmtlichen beobachteten Werthen des p sei. In einem solchen Falle also, wenn zur Bestimmung einer Unbekannten unmittelbare Messungen derselben vorgenommen werden können, und von ihnen in Bezug auf Zuverlässigkeit keine einen besondern Vorzug vor den übrigen verdient, giebt das arithmetische Mittel den möglichst richtigen Werth der Unbekannten.

13. Bei Beobachtungen dieser Art, zu denen das tägliche Leben so gut wie wissenschaftliche Untersuchungen die Fülle Beispiele bieten, ereignet es sich häufig, dass verschiedene Messungen dieselben Werthe ergeben, dass man z. B. für p αmal den Werth M_1, βmal den Werth M_2, γmal den Werth M_3 etc. aus der unmittelbaren Beobachtung erhält. Da die Wiederkehr desselben Werthes die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass er dem richtigen Werth des p näher liege als andere, welche weniger oft erhalten sind, so muss dieser Umstand berücksichtigt werden. Man würde aber jetzt αmal den Fehler $F - M_1$, βmal den Fehler $F - M_2$ etc. übrig gelassen haben und man müsste jetzt

$$\alpha . (F - M_1)^2 + \beta (F - M_2)^2 + \gamma (F - M_3)^2 + \ldots \nu (F - M_n)$$

zu einem Minimum machen. Dafür lautet aber die Bedingungsgleichung

$$\alpha . (F - M_1) + \beta (F - M_2) + \gamma (F - M_3) + \ldots \nu (F - M_n) = 0$$

folglich $$F = \frac{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \ldots \nu . M_n}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots . \nu}$$

d. h. $$p = \frac{\Sigma (\alpha . M)}{\Sigma \alpha} = \frac{[\alpha . M]}{[\alpha]},$$ wenn wir der Gaussischen Bezeichnungsweise folgen, d. h. man hat jeden beobachteten Werth mit der Zahl, welche seine Wiederkehr anzeigt, einzeln zu multiplicieren, die Producte zu addieren, und deren Summe durch die Menge der überhaupt angestellten Beobachtungen zu dividieren.

Ergibt z. B. eine Winkelmessung mit einem 10 Sekunden directe Ablesung gestattenden Sextanten 4mal den Werth eines Winkels zu $34^0 53' 10''$, 6mal $34^0 53' 13'',33$, 7mal $34^0 53' 7'',75$, so wird der zuverlässigste Werth für den gesuchten Winkel oder

$$p = \frac{4 \times 34^0 53' 10'' + 6 \times 34^0 53' 13'',33 + 7 \times 34^0 53' 7'',75}{4 + 6 + 7}$$

$$= \frac{17 \times 34^0 53' 7'',75 + 4 \times 2'',25 + 6 \times 5'',58}{17}$$

$$= 34^0\,53'\ 7'',75 + \frac{4 \times 2'',\overset{35}{\cancel{5}} + 6 \times 5'',58}{17}$$

$$= 34^0\,53'\,10'',31,$$

indem man vorab den niedrigsten der gemessenen Werthe als Näherungswerth ansieht.

14. Untersucht man die Gründe, warum solche directe Beobachtungen z. B. mit dem Sextanten so von einander abweichende Resultate ergeben, so wird man die nächste und häufigste Erklärung im fehlerhaften Einvisieren suchen können, da Ablesungsfehler bei geschickter Vermeidung der parallactischen Winkel, und Veränderungen des Indexfehlers bei solide construierten Instrumenten jedenfalls bedeutend gegen jene zurücktreten. Man kann aber häufig eine Erklärung auch im verschiedenen Zustande der Atmosphäre finden, der verschiedene Strahlenbrechungen verursacht, und sich vorstellen, dass jene Werthe Durchschnittswerthe aus 4, 6 und 7 Beobachtungen an z. B. 3 verschiedenen Tagen waren. Das fehlerhafte Einvisieren ist auch der Hauptgrund, weshalb Messungen mit Repetitionsinstrumenten nach α, β, γ ... Repetitionen abweichende Resultate für die beobachteten Werthe ergeben. Aus dem Vorstehenden erhellt, dass man auch nach solchen Messungen die Repetitionszahlen den Durchschnittswerthen der einzelnen Winkelmessungen als Factoren beizulegen hat, und die Summe der Producte durch die Summe der Repetitionszahlen dividieren muss, um den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Winkelgrösse zu erhalten. Diese Repetitionszahlen, oder wie oben die Zahlen, welche die Wiederkehr einer gleichen Beobachtung angaben, überhaupt alle Zahlwerthe, welche die Zuverlässigkeit einzelner Beobachtungen ausdrücken, nennt man die Gewichte dieser Beobachtungen. Wir werden alsbald weiter auf sie zurückkommen.

15. Im vorstehenden Beispiel erhält man als Beobachtungsfehler

$F - M_1 = + 0'',31$	also $(F - M_1)^2 = 0{,}0961$	u. $4(F - M_1)^2 =$	$0{,}3844$
$F - M_2 = - 3'',02$	„ $(F - M_2)^2 = 9{,}1204$	u. $6(F - M_2)^2 =$	$54{,}7224$
$F - M_3 = + 2'',56$	„ $(F - M_3)^2 = 6{,}5536$	u. $7(F - M_3)^2 =$	$45{,}8752$
		Summe $=$	$100{,}9820$

die kleiner ist, als sie für jeden andern Werth des Winkels ausgefallen wäre.

Setzte man z. B. $p = 34^0\,53'\,10'' = F$, so hätte man erhalten

$F-M_1 = 0$, also $(F-M_1)^2 = 0$, $4(F-M_1)^2 = 0$
$F-M_2 = -3'',33$ „ $(F-M_2)^2 = 11,0889$, $6(F-M_2)^2 = 66,5334$
$F-M_3 = +2'',25$ „ $(F-M_3)^2 = 5,0625$, $7(F-M_3)^2 = 35,4375$

Summe $= 101,9709$

Dagegen für $p = 34^0\,53'\,10'',50 = F$ erhielte man
$F-M_1 = +0,50$, also $(F-M_1)^2 = 0,2500$, $4(F-M_1)^2 = 1,0000$
$F-M_2 = -2,83$, „ $(F-M_2)^2 = 8,0089$, $6(F-M_2)^2 = 48,0534$
$F-M_3 = +2,75$, „ $(F-M_3)^2 = 7,5625$, $7(F-M_3)^2 = 52,9375$

Summe $= 101,9909$

Endlich würden die Summen der einzelnen Fehler mit und ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen geworden sein
für $p = 34^0\,53'\,10'',31$ algebr. Summe $= -0,15$, absol. Sum. $= 5,89$
„ $p = 34^0\,53'\,10'',00$ „ „ $= -1,08$, „ „ $= 5,58$
„ $p = 34^0\,53'\,10'',50$ „ „ $= +0,42$, „ „ $= 6,08$

Während also für den wahrscheinlichsten Werth des Winkels $p = 34^0\,53'\,10'',31$ auch die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler sich kleiner herausstellt, als sie für andere Werthe für p wird, ist die Summe der Fehler, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen genommen, für $p = 34^0\,53'\,10''$ kleiner geworden als für die anderen Werthe (vergl. No. 7).

16. Zu einem andern Beispiel über die Anwendbarkeit des arithmetischen Mittels diene eine Reihe von Beobachtungen, welche im physikalischen Cabinet des Gymnasiums zu Jever zum Zweck der Reduction der Angaben einer von mir construierten Tangenten-Boussole auf chemisches Maass angestellt wurden. Da bei diesem Instrumente die Stromstärke S sich gleich der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, T, multipliciert mit der trigonometrischen Tangente des Ablenkungswinkels α ergiebt so hat man im Allgemeinen die Gleichung $S = T \,.\, tang\, \alpha$; daraus folgt $S = T$ für $\alpha = 45^0$, also ein Ausdruck für die Stärke des Erdmagnetismus in chemischem Maass, während für jeden andern Werth von α, $T = S \,.\, cot\, \alpha$ wird. Die Werthe von S in Cubikcentimetern Knallgas, das natürlich über Quecksilber aufgefangen wurde, nebst den zugehörigen Werthen von α ergeben sich aus folgender Zusammenstellung der Beobachtungen:

Bunsen'sche Becher von Stöhrer, Zahl derselben	Menge d. Beobachtungen, rsp. deren Gewichte	$< \alpha$ am Anfang jeder Beobachtung	$< \alpha$ am Ende jeder Beobachtung	$< \alpha$ mittlerer Werth	Knallgasmeng. in Cubikcentimeter in 60 Sec.	mittlere Mengen Knallgas in 60 Sec.
8	1ste	29^0	$29^0\ 30'$		24 cc.	
	2te	29^0	$28^0\ 45'$	$29^0\ 1'$	23,25	23,58
	3te	29^0	$28^0\ 50'$		23,50	
7	1ste	26^0	26^0		21	
	2te	$25^0\ 30'$	26^0	$25^0\ 55'$	20	20,67
	3te	26^0	26^0		21	
6	1ste	23^0	23^0		17,75	
	2te	23^0	$22^0\ 50'$	$23^0\ 0'$	18	17,83
	3te	$23^0\ 10'$	23^0		17,75	
5	1ste	19^0	19^0		14,50	
	2te	19^0	19^0	$19^0\ 0'$	14,50	14,50
4	1ste	14^0	14^0		10,25	
	2te	14^0	14^0	$14^0\ 10'$	10	10,08
	3te	$14^0\ 30'$	$14^0\ 30'$		10	
3	1ste	$9^0\ 30'$	9^0		4,75	
	2te	9	9^0	$9^0\ 8'$	4,50	4,63
4	1ste	$14^0\ 30'$	14^0	$14^0\ 15'$	10,25	10,25
5	1ste	16^0	16^0	$16^0\ 0'$	14,00	14,00
6	1ste	21^0	21^0	21^0	17,50	17,50
7	1ste	25^0	$24^0\ 30'$		21,00	
	2te	$24^0\ 30'$	$24^0\ 30'$	$24^0\ 38'$	21,00	21,00
8	1ste	28^0	28^0	28^0	24,50	24,50

Der Barometerstand war $28''\,2''',29$ Par. bei einer Temperatur von $7^0,3$ R., während die Temperatur des Gases zu durchgängig 5^0 R. $= 6^0,2$ C. anzunehmen war.

An der Verschiedenheit der Werthe des Ablenkungswinkels α, die sich bei verminderter und vermehrter Anzahl der Becher herausstellt, ist hauptsächlich die Trägheit der Nadel Schuld, welche der abnehmenden und zunehmenden Stromstärke nicht gleich rasch folgte; die Mittelwerthe dürften deshalb um so grösseres Zutrauen verdienen.

Die Beobachtungen führen nun auf die Gleichungen

$23{,}58 = T.tang\ 29^\circ 1'$,	daraus $T = 42{,}50$,	mit dem Gewichte 3,	also $= 127{,}50$
$20{,}67 = T.tang\ 25^\circ 55'$,	„ $T = 42{,}54$,	mit dem Gewichte 3,	also $= 127{,}62$
$17{,}83 = T.tang\ 23^\circ$,	„ $T = 42{,}01$,	mit dem Gewichte 3,	also $= 126{,}03$
$14{,}50 = T.tang\ 19^\circ$,	„ $T = 42{,}10$,	mit dem Gewichte 2,	also $= 84{,}20$
$10{,}08 = T.tang\ 14^\circ 10'$,	„ $T = 39{,}93$,	mit dem Gewichte 3,	also $= 119{,}79$
$4{,}63 = T.tang\ 9^\circ 8'$,	„ $T = 28{,}80$,	mit dem Gewichte 2,	also $= 57{,}60$
$10{,}25 = T.tang\ 14^\circ 15'$,	„ $T = 40{,}36$,	mit dem Gewichte 1,	also $= 40{,}36$
$14{,}00 = T.tang\ 16^\circ$,	„ $T = 48{,}82$,	mit dem Gewichte 1,	also $= 48{,}82$
$17{,}50 = T.tang\ 21^\circ$,	„ $T = 45{,}07$,	mit dem Gewichte 1,	also $= 45{,}07$
$21{,}00 = T.tang\ 24^\circ 38'$,	„ $T = 45{,}80$,	mit dem Gewichte 2,	also $= 91{,}60$
$24{,}50 = T.tang\ 28^\circ$,	„ $T = 46{,}08$,	mit dem Gewichte 1,	also $= 46{,}08$

Man erhält also $T = \frac{[\alpha . M]}{[\alpha]}$ laut No. 13 hier $= \frac{914{,}67}{22}$ $= \overset{cc}{41{,}58}$. Nun war der auf 0° R. reducierte Barometerstand $28'' 1''', 69 = 337''', 69$; also die auf 0° R. Temperatur reducierte Gasmenge würde geworden sein, bei einem Barometerstande von 28″ Par.

$$\frac{\overset{cc}{41{,}58} \,.\, 337{,}69}{336} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}003665 \,.\, 6^\circ{,}2\ C.}$$

$$= \frac{\overset{cc}{41{,}58} \,.\, 337{,}69}{336 \,.\, 1{,}022723}$$

$$= \overset{cc}{40{,}86}. -$$

Die Menge Cubik-Centimeter Knallgas oder S, welche ein galvanischer Strom bei einem Ausschlagswinkel jener Boussole $= \alpha$ am bezeichneten Ort liefern würde, kann also gefunden werden durch die Gleichung

$$S = \overset{cc}{40{,}86} \,.\, tang.\ \alpha$$

vorausgesetzt, dass das Barometer auf 28″ Par. bei 0° Temperatur steht.

Anm. Da Weber's Stromeinheit eine Stärke hat, um in 1 Minute 1,0477 C.-Cent. zu entwickeln, so würde ein Strom, der an jener Boussole einen Ablenkungswinkel von 45° hervorbrächte, nach chemischem Maass eine Stärke von 40,86, nach Weber's absolutem Maass eine Stärke von $\frac{40,86}{1,0477}$ $= 38,90$ haben. Wenn nun der Durchmesser des Ringes jener Boussole 300mm betrug, und die Stromstärke nach absolutem Maass ausgedrückt gefunden wird durch $s = \frac{T \cdot r \cdot}{2\pi}$, wo r den Radius der Boussole bezeichnet, so erhielt man jetzt die horizontale Componente der Intensität des Erdmagnetismus oder

$$T = \frac{s \cdot 2\pi}{r} = \frac{38,90 \times 6,282 \ldots}{150}$$
$$= 1,6294.$$

Die Data jener Beobachtungen stammen aus dem Jahre 1856. Für 1852 ergiebt sich aus den Lamont'schen Karten für T ein Werth von 1,71 (vergl. J. Müller kosm. Physik, pag. 481), also ziemlich übereinstimmend mit dem vorstehenden Resultat.

B. Aufgaben, welche auf lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen.

17. Die allgemeine Form der Functionen der Unbekannten $p, q, r, s \ldots$, deren beobachtete Werthe durch die Zahlwerthe M_1, M_2, M_3 u. s. w. bezeichnet werden mögen, wäre

$$\begin{aligned} a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \ldots\ldots &= M_1 \\ a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \ldots\ldots &= M_2 \\ a_3 p + b_3 q + c_3 r + d_3 s + \ldots\ldots &= M_3 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

in welchen die $a_1, b_1, c_1 \ldots, a_2, b_2 \ldots, a_3, b_3 \ldots$, u. s. f. gewisse von der Natur der Unbekannten abhängige Factoren bedeuten, deren nähere Feststellung in jedem concreten Fall also vorbehalten bleibt. Voraussetzung ist wieder, dass die Anzahl der gegebenen Gleichungen erheblich grösser sei als die der Unbekannten; man sucht nun wiederum Werthe für die Unbekannten $p, q, r \ldots$, welche sämmtliche Gleichungen möglichst befriedigen, d. h. die so beschaffen sind, dass die Werthe der Functionen $a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots, a_2 p + b_2 q + c_2 r + \ldots$ u. s. f., die wir nach der Substitution durch F_1, F_2, F_3 u. s. w. bezeichnen, sich so sehr den beobachteten Werthen derselben Functionen, M_1, M_2, M_3, nähern, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler, also wieder $(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 + \ldots$ ein Minimum wird.

Die übrigbleibenden Fehler, $F_1 - M_1$ u. s. w., sind aber auch so auszudrücken:

$$F_1 - M_1 = a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \ldots\ldots - M_1$$
$$F_2 - M_2 = a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \ldots\ldots - M_2$$
$$F_3 - M_3 = a_3 p + b_3 q + c_3 r + d_3 s + \ldots\ldots - M_3 \quad \text{u. s. f.}$$

Die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Summe ihrer Quadrate, welche in No. 11 erhalten sind, d. h. die Gleichungen von der Form

$$(F_1 - M_1)\frac{dF_1}{dp} + (F_2 - M_2)\frac{dF_2}{dp} + \ldots\ldots = 0$$

stellen also die wirklichen Gleichungen

$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots - M_1)\, a_1 + (a_2 p + b_2 q + \ldots - M_2)\, a_2 + (a_3 p + b_3 q + \ldots - M_3)\, a_3 + \ldots\ldots = 0$$
$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots - M_1)\, b_1 + (a_2 p + b_2 q + \ldots - M_2)\, b_2 + (a_3 p + b_3 q + \ldots - M_3)\, b_3 + \ldots\ldots = 0$$
$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \ldots - M_1)\, c_1 + (a_2 p + b_2 q + \ldots - M_2)\, b_2 + (a_3 p + b_3 q + \ldots - M_3)\, c_3 + \ldots\ldots = 0$$

u. s. w. vor, und man erhält soviel Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Gleichungen (ω).

Ordnet man jetzt die Gleichungen nach den Unbekannten, und bezeichnet der Kürze halber die hervortretenden Summen

$$a_1^2 p + a_2^2 p + a_3^2 p + \ldots a_4^2 p = p\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_n^2)$$ nach Gauss durch $p\,[a^2]$

$$a_1 b_1 q + a_2 b_2 q + \ldots a_n b_n q = q\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots a_n b_n)$$ durch $q\,[ab]$

und so fort durch alle Gleichungen hindurch, so gehen die eben genannten Gleichungen alsbald über in

$$p\,[a^2] + q\,[ab] + r\,[ac] + s\,[ad] + \ldots - [aM] = 0$$
$$p\,[ab] + q\,[b^2] + r\,[bc] + s\,[bd] + \ldots - [bM] = 0$$
$$p\,[ac] + q\,[bc] + r\,[c^2] + s\,[cd] + \ldots - [cM] = 0$$
$$p\,[ad] + q\,[bd] + r\,[cd] + s\,[d^2] + \ldots - [dM] = 0$$

u. s. w.

Man pflegt diese Gleichungen, deren Anzahl so gross als die der Unbekannten wird, **Normalgleichungen** zu nennen, im Gegensatz zu den **ursprünglichen Gleichungen**, in welchen die

Resultate der Beobachtungen zunächst niedergelegt waren. Man kann sich ihre Bildung auch so merken: multipliciert man jede der vorhandenen ursprünglichen Gleichungen mit dem Factor der ersten in ihr vorkommenden unbekannten Grösse, und addiert alsdann alle jetzt erhaltenen Gleichungen, so hat man die erste Normalgleichung; multipliciert man ferner jede ursprüngliche Gleichung mit dem Factor der zweiten in ihr vorkommenden Unbekannten und addiert wiederum sämmtliche Gleichungen, so hat man die zweite Normalgleichung, und in ganz ähnlicher Weise fortfahrend die übrigen. Um sich vor etwaigen Rechenfehlern, beziehungsweise Wiederholungen, zu hüten, beachte man, dass in den Normalgleichungen in diagonaler Richtung von links oben nach rechts unten, die Summen der Quadrate aller Factoren a, b, c, d u. s. w., mit welchen die Unbekannten p, q, r ... beziehungsweise versehen sind, zu den Unbekannten als Factoren hinzutreten, während symmetrisch zu beiden Seiten als gleiche Factoren die Summen $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[bd]$ u. s. w. auftreten, wie dies ohne Weiteres aus dem blossen Anblick der Gleichungen ω folgen muss. Damit hängt zusammen, dass die diagonal von links oben nach rechts unten laufenden Factoren nothwendig alle positiv werden, die übrigen Factoren aber im Allgemeinen verschiedene Vorzeichen haben können.

Um die Unbekannten p, q, r ... zu ermitteln, wende man jetzt nur noch das gewöhnliche Eliminationsverfahren an.

18. So viel im Allgemeinen über die Lösung derartiger Aufgaben, bei denen wir stillschweigend die Voraussetzung haben gelten lassen, dass die einzelnen beobachteten Werthe M_1, M_2, M_3 ... alle gleichen Grad von Zutrauen verdienten. Sehr häufig ist dies aber, wie wir auch schon oben (13) bemerkten, nicht der Fall, z. B. wenn derselbe Werth M_1 αmal, der Werth M_2 βmal, M_3 vielleicht γmal wiedergekehrt, oder der Werth M_1 ein Mittelwerth aus α Beobachtungen gleicher Art, M_2 ein Mittelwerth aus β Beobachtungen gleicher Art u. s. w. gewesen wäre, oder wenn vielleicht M_1 das Resultat einer Winkelmessung mit einem Instrumente war, welches direct 20 Sekunden abzulesen gestattet, während M_2 durch ein Instrument, welches 10 Sekunden direct abzulesen erlaubt, erhalten ist; oder ferner wenn die Beobachter in Betreff ihrer Uebung und Erfahrung so verschieden waren, dass eine Beobachtung des einen Beobachters vielleicht so zuverlässig erachtet werden darf als zwei Beobachtungen des andern. Da in

allen diesen und ähnlichen Fällen die Normalgleichungen mehr oder minder bedeutende Veränderungen erleiden werden, so muss die Bestimmung der Gewichte der einzelnen Beobachtungen und ihres Einflusses auf die ganze Rechnung der Bildung der Normalgleichungen voraufgehen.

19. Zur Bestimmung der Gewichte ist das Wesentliche nun schon in No. 13 und 14 gesagt, indem die dortigen Erörterungen noch immer vollkommen gültig bleiben. In anderen Fällen, als den daselbst genannten, besonders aber, wenn es um persönliche Vergleiche oder um Zuverlässigkeit von Zeit- und Höhenmessungen bei Durchgängen von Sternen durch ungleich viele Fäden des Theodolithen oder um Schätzung der Wirkung äusserer Umstände, z. B. Zittern der Luft u. s. w., sich handelt, ist die Bestimmung der Gewichte sehr discretionairer Natur, und deshalb eine Sache des Tackts und der Erfahrung, welche selbst an sich richtige Regeln wie die, dass Ablesungen von Instrumenten von ungleich genauer Theilung, auf 20 und auf 10 Sekunden z. B., im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Genauigkeit der Theilungen, hier also wie 1 : 4 hinsichtlich ihrer Glaubwürdigkeit stehen, gelegentlich zu modificieren sich versucht fühlt. Sind aber endlich die Zahlen α, β, γ ... ν festgestellt, welche die Güte der einzelnen Beobachtungen charakterisieren sollen, so kann man die Sache wieder so ansehen (vergl. No. 13), als ob man statt je einer Gleichung von der Form

$$a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \ldots = M_1$$
$$a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \ldots = M_2 \quad \text{u. s. w.}$$

deren beziehungsweise $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ erhalten hätte. Natürlich stellt sich dann auch αmal der Fehler $F_1 - M_1$

βmal „ „ $F_2 - M_2$

γmal „ „ $F_3 - M_3$ u. s. w.

ein, und die Forderung, die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler zu einem Minimum zu machen, wird zur Forderung, dass

$$\alpha (F_1 - M_1)^2 + \beta (F_2 - M_2)^2 + \gamma (F_3 - M_3)^2 + \ldots \nu (F_n - M_n)^2$$

zu einem Kleinsten werde. Diese Bedingung wird aber erfüllt durch die partiellen Gleichungen

$$\alpha (a_1 p + b_1 q + \ldots - M_1) a_1 + \beta (a_2 p + b_2 q + \ldots - M_2) a_2 + \ldots$$
$$\nu (a_n p + b_n q + \ldots - M_n) a_n = 0$$
$$\alpha (a_1 p + b_1 q + \ldots - M_1) b_1 + \beta (a_2 p + b_2 q + \ldots - M_2) b_2 + \ldots$$
$$\nu (a_n p + b_n q + \ldots - M_n) b_n = 0$$

u. s. f., welche nach p, q, $r\ldots$ geordnet übergehen in die Normalgleichungen

$$p\,(\alpha a_1^2+\beta a_2^2+\gamma a_3^2+\ldots)+q\,(\alpha . a_1 b_1+\beta a_2 b_2+\gamma a_3 b_3+\ldots)+\ldots$$
$$-(\alpha a_1 M_1+\beta a_2 M_2+\ldots)=0$$
$$p\,(\alpha a_1 b_1+\beta a_2 b_2+\gamma a_3 b_3+\ldots)+q(\alpha b_1^2+\beta b_2^2+\gamma . b_3^2+\ldots)+\ldots$$
$$-(\alpha b_1 M_1+\beta b_2 M_2+\ldots)=0$$

u. s. w.

Man findet also bei Berücksichtigung der Gewichte die Normalgleichungen, indem man jede ursprüngliche Gleichung nicht allein, wie in No. 17, mit dem Factor der Unbekannten, in Bezug auf welche man differentiiert hat, multipliciert, sondern ausserdem auch noch mit der Zahl multipliciert, welche das Gewicht der in der Gleichung niedergelegten Beobachtung angiebt, und dann erst die jetzt erhaltenen Gleichungen addiert.

Allgemein andeuten lässt sich das Verfahren, indem man die Normalgleichungen also schreibt:

$$p\,\Sigma a^2 . (\alpha\ldots\nu)+q\,\Sigma ab\,(\alpha\ldots\nu)+r\,\Sigma ac(\alpha\ldots\nu)+\ldots.$$
$$-\Sigma aM\,(\alpha\ldots\nu)=0$$
$$p\,\Sigma ab\,(\alpha\ldots\nu)+q\,\Sigma b^2\,(\alpha\ldots\nu)+r\,\Sigma bc\,(\alpha\ldots\nu)+\ldots.$$
$$-\Sigma bM\,(\alpha\ldots\nu)=0$$
$$p\,\Sigma ac\,(\alpha\ldots\nu)+q\,\Sigma bc\,(\alpha\ldots\nu)+r\,\Sigma c^2\,(\alpha\ldots\nu)+\ldots.$$
$$-\Sigma cM\,(\alpha\ldots\nu)=0$$

u. s. f., oder wenn man sich unter g die Gewichte im Allgemeinen angedeutet denkt, nach Gauss Bezeichnung durch

$$p . [g . a^2]+q\,[g . ab]+r\,[g . ac]\ldots-[g . aM]=0$$
$$p\,[g . ab]+q\,[g . b^2]+r\,[g . bc]\ldots-[g . bM]=0$$

u. s. f.

20. Die Erörterungen in No. 17—19 genügen zur Lösung aller Aufgaben, bei denen die Beobachtungen auf mehr und zwar lineäre Gleichungen führen, als Unbekannte vorhanden sind, und man nun die wahrscheinlichsten Werthe sucht, welche die Unbekannten annehmen können. Dass es hierbei, wie überall beim praktischen Rechnen Abkürzungen, Rücksichten, sogenannte Kunstgriffe giebt, welche das gewöhnlich an sich langwierige und mühselige Verfahren zu vereinfachen gestatten, oder welche Controlen und Sicherheit vor Rechenfehlern gewähren, wird sich am besten bei der wirklichen Ausführung der Rechnungen, zu denen wir alsbald übergehen, zeigen lassen.

Unter allen hierher gehörigen Fällen wird offenbar der einfachste derjenige sein, in welchem sämmtliche Factoren a, b, $c\ldots$ der Unbekannten p, q, $r\ldots$, $= 1$, und die Gewichte der einzelnen Functionen einander gleich sind. Ein solcher Fall ist in der nächstfolgenden Aufgabe enthalten.

21. Berichtigung eines Nivellements.

Das Nivellement der Bahnhöfe zu B, H, L, G, W hat ergeben, dass der Bahnhof zu

p	B . .	115,52	Fuss	über	dem	Nullpunkt	des Pegels der Nordsee bei A liegt	
q	H . .	60,12	„	„	„	Bahnhof von B		
	H . .	177,04	„	„	„	Nullp. des Pegels der Nordsee bei A		
	L . .	234,12	„	„	„	Bahnhof von B		
r	L . .	171,00	„	„	„	„	„	H
	G . .	632,25	„	„	„	„	„	L
s	G . .	211,01	„	„	„	„	„	W
	W . .	596,12	„	„	„	„	„	H
t	W . .	427,18	„	„	„	„	„	L liegt.

Man fragt nach den absoluten wahrscheinlichsten Höhen der genannten Bahnhöfe über dem Nullpunkt des Pegels zu A. Die Data sind einer Zusammenstellung der Höhen der Bahnhöfe auf den Preussischen Eisenbahnen in Heis' Wochenschrift für Astronomie und Physik, 1860, Seite 378, entnommen, und würde der Anfänger dort reichen weitern Stoff zur Uebung finden.

Die gesuchten Höhen sind unsere Unbekannten p, q, r, s, t, und es ergeben sich sofort aus den Beobachtungen folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
115{,}52 & = & +p & & & & \\
60{,}12 & = & -p & +q & & & \\
177{,}04 & = & & +q & & & \\
234{,}12 & = & -p & & +r & & \\
171{,}00 & = & & -q & +r & & \\
632{,}25 & = & & & -r & +s & \\
-\ 211{,}01 & = & & & & -s & +t \\
596{,}12 & = & & -q & & & +t \\
427{,}18 & = & & & -r & & +t
\end{array}
$$

Multipliciert man nun jede Gleichung, in welcher p vorkommt, mit dem Factor von p (hier also mit $+1$ oder mit -1) und addiert die aus dieser Multiplication hervorgehenden Gleichungen; multipliciert sodann jede der ursprünglichen Gleichungen, in welcher q vorkommt, mit dem Factor von q und addiert wiederum alle jetzt erhaltenen Gleichungen und fährt so fort, die Gleichungen in Bezug auf r, s und t zu behandeln, so erhält man die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
1) & -178{,}72 = 3p - q - r \\
2) & -529{,}96 = -p + 4q - r - t \\
3) & -654{,}31 = -p - q + 4r - s - t \\
4) & 843{,}26 = -r + 2s - t \\
5) & 812{,}29 = -q - r - s + 3t
\end{array}$$

also fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten.

Im gewöhnlichen Eliminationsverfahren würde man wohl thun, $-178{,}72 = P$, $-529{,}96 = Q$, $-654{,}31 = R$, $843{,}26 = S$, $812{,}29 = T$ zu setzen, um nicht fortwährend die Ziffern in Rechnung zu führen; man erhält dann leicht

$$\begin{array}{ll}
6) & 5q - 5r + s = Q - R \\
7) & -p - q + 5r - 3s = R - S \\
8) & 15p - 10q - s = 5P - Q + R \\
9) & -p + 4q - 2s = Q - S \\
10) & -19p + 51q - 17s = 15Q + 4R - 4S + 5T
\end{array}$$

aus 8) und 9) folgt

$$10)\quad 31p - 24q = 10P - 3Q + 2R + S$$

aus 9) und 10) aber

$$11)\quad -21p + 34q = +13Q + 8R + 9S + 10T$$

Nun hat man alsbald

$$\begin{array}{ll}
12) & 55p = 34P + 21Q + 26R + 25S + 24T \\
13) & 55q = 21P + 34Q + 29R + 30S + 31T \\
14) & 55r = 26P + 29Q + 49R + 45S + 41T \\
15) & 55s = 25P + 30Q + 45R + 75S + 50T \\
16) & 55t = 24P + 31Q + 41R + 50S + 59T
\end{array}$$

Diese Gleichungen haben augenscheinlich die bemerkenswerthen Eigenschaften der Normalgleichungen in Betreff der Factoren der P, Q, R ... behalten; durch Substitution der Werthe von P, Q ... erhält man sofort

$55p = 6358{,}76$, woraus sich ergiebt $p = 115{,}61$
$55q = 9632{,}04$, „ „ „ $q = 176{,}95$
$55r = 19173{,}84$, „ „ „ $r = 348{,}62$
$55s = 54048{,}25$, „ „ „ $s = 982{,}70$
$55t = 42543{,}36$, „ „ „ $t = 773{,}52$

Die übriggebliebenen Fehler, d. h. die $F - M$ ergeben sich durch Substitution dieser Werthe für $p, q, \ldots$ in die ursprünglichen Gleichungen. Man hat

$$\begin{array}{llll}
F_1 - M_1 = + 0{,}09 & \text{also} & (F_1 - M_1)^2 = 0{,}0081 \\
F_2 - M_2 = + 1{,}22 & \text{„} & (F_2 - M_2)^2 = 1{,}4884 \\
F_3 - M_3 = - 0{,}09 & \text{„} & (F_3 - M_3)^2 = 0{,}0081 \\
F_4 - M_4 = - 1{,}11 & \text{„} & (F_4 - M_4)^2 = 1{,}2321 \\
F_5 - M_5 = + 0{,}67 & \text{„} & (F_5 - M_5)^2 = 0{,}4489 \\
F_6 - M_6 = + 1{,}83 & \text{„} & (F_6 - M_6)^2 = 3{,}3489 \\
F_7 - M_7 = + 1{,}83 & \text{„} & (F_7 - M_7)^2 = 3{,}3489 \\
F_8 - M_8 = + 0{,}45 & \text{„} & (F_8 - M_8)^2 = 0{,}2025 \\
F_9 - M_9 = - 2{,}28 & \text{„} & (F_9 - M_9)^2 = 5{,}1984 \\
\hline
& & \text{folglich } \Sigma\,(F - M)^2 = 15{,}2843,
\end{array}$$

kleiner als für jeden andern Werth der $p, q, r \ldots$

22. Die vorstehende ganz gewöhnliche Rechnung lässt sich noch in mancher Hinsicht abkürzen. Zunächst erscheinen die grossen Zahlen störend: man vermeidet sie noch gründlicher als durch Einführung der Werthe $P, Q, R \ldots$ durch Einführung von sogenannten Näherungswerthen, worunter man Zahlwerthe der Unbekannten versteht, welche nach ungefährer Beurtheilung den gegebenen ursprünglichen Gleichungen schon ziemlich genau entsprechen. Z. B. aus der ersten Gleichung folgt nahezu $p = 116$; setzt man also $p = 116 + p_1$, wo p_1 eine noch zu bestimmende Correction bedeutet, so geht die erste der ursprünglichen Gleichungen über in $-0{,}48 = + p_1$. Ebenso folgt aus der dritten der ursprünglichen Gleichungen $q = 177$ nahezu; setzt man wiederum $q = 177 + q_1$, so verwandelt sich die dritte Gleichung in $0{,}04 = q_1$ und geht jetzt die zweite über in $-0{,}88 = -p_1 + q_1$. So wird man aus den zwei folgenden Gleichungen leicht erhalten $r = 350 + r_1$; ferner $s = 984 + s_1$, $t = 775 + t_1$. Unter Benutzung dieser Näherungswerthe mit angehängten Correctionen werden jetzt die ursprünglichen Gleichungen übergehen in

$$\begin{array}{rcrrrrr}
-0{,}48 & = & +p_1 & & & & \\
-0{,}88 & = & -p_1 & +q_1 & & & \\
0{,}04 & = & & +q_1 & & & \\
0{,}12 & = & -p_1 & & +r_1 & & \\
-2{,}00 & = & & -q_1 & +r_1 & & \\
-1{,}75 & = & & & -r_1 & +s_1 & \\
-2{,}01 & = & & & & -s_1 & +t_1 \\
-1{,}88 & = & & -q_1 & & & +t_1 \\
+2{,}18 & = & & & -r_1 & & +t_1
\end{array}$$

Aus ihnen erhält man gerade so, wie vorhin angegeben, die Normalgleichungen

$$\begin{array}{rcl}
+\,0{,}28 &=& +3p_1 - q_1 - r_1 \qquad\qquad\qquad = P_1 \\
+\,3{,}04 &=& -\,p_1 + 4q_1 - r_1 \qquad\qquad - t_1 = Q_1 \\
-\,2{,}31 &=& -\,p_1 - q_1 + 4r_1 - s_1 - t_1 = R_1 \\
+\,0{,}26 &=& \qquad\qquad -\,r_1 + 2s_1 - t_1 = S_1 \\
-\,1{,}71 &=& \qquad -\,q_1 - r_1 - s_1 + 3t_1 = T_1
\end{array}$$

Da nun wieder wie oben

$$55\,p_1 = 34\,P_1 + 21\,Q_1 + 26\,R_1 + 25\,S_1 + 24\,T_1$$

u. s. w.

so erhält man auch

$$\begin{array}{lll}
55\,p_1 = -21{,}24, & \text{also } p_1 = -0{,}39, & \text{und } p = 116 - 0{,}39 = 115{,}61 \\
55\,q_1 = -\ \ 2{,}96, & \quad ,, \quad q_1 = -0{,}05, & \quad ,, \quad q = 177 - 0{,}05 = 176{,}95 \\
55\,r_1 = -76{,}16, & \quad ,, \quad r_1 = -1{,}38, & \quad ,, \quad r = 350 - 1{,}38 = 348{,}62 \\
55\,s_1 = -71{,}75, & \quad ,, \quad s_1 = -1{,}30, & \quad ,, \quad s = 984 - 1{,}30 = 982{,}70 \\
55\,t_1 = -81{,}64, & \quad ,, \quad t_1 = -1{,}48, & \quad ,, \quad t = 775 - 1{,}48 = 773{,}52
\end{array}$$

in Uebereinstimmung mit den direct gefundenen Resultaten.

23. Aus Vorstehendem erhellt, dass schliesslich durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren die Unbekannten ermittelt werden. So lange die Anzahl der Unbekannten klein ist, 2 bis 3 vielleicht, so giebt es wohl keinen Weg, der trotz der häufig mühsamen Rechnung schneller zum Ziele führte. Wird aber die Menge der Unbekannten, wie das nicht selten vorkommt, grösser, so dürften die folgenden Methoden den Vorzug verdienen.

Die Correctionen p_1, q_1, r_1 ... der Näherungswerthe, welche in No. 22 in die Rechnung eingeführt wurden, und welche dort in den Normalgleichungen als neue Unbekannte auftreten, sind voraussichtlich schon kleine Werthe, wenn, wie auch sonst rathsam, die Bestimmung der Näherungswerthe mit Umsicht vorgenommen wird. Man würde indessen einen Fehler begehen, wenn man z. B. die erste Gleichung

$$0{,}28 = 3p_1 - q_1 - r_1$$

dahin abändern wollte, dass man unter Vernachlässigung der q_1 und r_1 sie also schriebe

$$0{,}28 = 3\,p_1, \quad \text{woraus folgte}$$

$$0{,}09 = \ p_1.$$

Jedoch könnte man immerhin diesen Werth 0,09 als Näherungswerth für die Correction p_1 gelten lassen, und jetzt $p_1 = 0{,}09 + p_2$ setzend, diesen Ausdruck $0{,}09 + p_2$ überall statt p_1 in die Gleichungen einführen. Die Gleichungen würden jetzt lauten (vergl. No. 22):

$$\begin{aligned}
+\,0{,}01 &= 3p_2 - q_1 - r_1 \\
+\,3{,}13 &= -p_2 + 4q_1 - r_1 - t_1 \\
-\,2{,}22 &= -p_2 - q_1 + 4r_1 - s_1 - t_1 \\
+\,0{,}26 &= -r_1 + 2s_1 - t_1 \\
-\,1{,}71 &= -q_1 - r_1 - s_1 + 3t_1
\end{aligned}$$

Was man aber jetzt bewirkt hat, ist, dass die Summe der Constanten links vom Gleichheitszeichen von 7,60 auf 7,33 heruntergegangen ist. Dies würde in noch stärkerem Grade der Fall gewesen sein, wenn man die Gleichung vorzugsweise so behandelt hätte, in welcher die Constante am grössten ist, also die zweite. Setzt man nämlich statt ihrer kurzweg

$$+\,3{,}13 = 4\,q_1$$

also $0{,}78 = q_1$ näherungsweise,

und jetzt $q_2 + 0{,}78 =$ dem wirklichen q_1,

so gehen die eben erhaltenen Gleichungen über in

$$\begin{aligned}
+\,0{,}79 &= 3p_2 - q_2 - r_1 \\
+\,0{,}01 &= -p_2 + 4q_2 - r_1 - t_1 \\
-\,1{,}44 &= -p_2 - q_2 + 4r_1 - s_1 - t_1 \\
+\,0{,}26 &= -r_1 + 2s_1 - t_1 \\
-\,0{,}93 &= -q_2 - r_1 - s_1 + 3t_1
\end{aligned}$$

und die absolute Summe der Constanten beträgt nur noch 3,43. Nun ist klar, wenn man so fortfährt, die noch vorhandenen r_1, s_1, t_1 durch neue Näherungswerthe verbunden mit r_2, s_2, t_2 zu ersetzen, ferner auch statt der p_2, q_2, r_2... andere Näherungswerthe und Correctionen derselben einzuführen, wodurch man endlich zu Unbekannten p_n, q_m u. s. w. gelangt, und dabei immer die Gleichung zunächst berücksichtigt, in welcher, abgesehen vom Vorzeichen, der constante Theil am grössten ist, dass dann gleichzeitig die Constanten links so herabgehen werden, dass man die letzten Correctionen p_n, q_m u. s. w. in den Gleichungen, ohne grössere Fehler als höchstens eine Einheit der letzten Decimale zu begehen, der Null gleichsetzen kann. Augenscheinlich erhielte man dann aber die eigentlichen unbekannten Grössen oder die

$p_1 =$ der Summe aller neuen Näherungswerthe $= \Sigma\, p_n$

$q_1 =$ „ „ „ „ „ $= \Sigma\, q_n$

u. s. f.

Die allerdings noch immer etwas langwierige aber sehr bequeme Rechnung ersieht man leicht aus folgender Zusammenstellung, bei welcher der Uebersichtlichkeit halber alle Accente weggelassen sind, die über den einzelnen Spalten stehenden Ausdrücke $q + 76$ u. s. w. die Gleichungen $q_1 = q_2 + 0{,}76$ vertreten, und darunter statt der ganzen Gleichungen nur die Constanten aufgeführt sind, weil ihre fortwährend sich verringernde Summe allein noch zu berücksichtigen bleibt. Unter fernerer Weglassung der Decimalkommata hat man

	$q + 76$	$r - 39$	$t - 45$	$q - 21$
$+3p - q - r - 0{,}28 = 0$	-104	-65	-65	-44
$-p + 4q - r - t - 3{,}04 = 0$	0	$+39$	$+84$	0
$-p - q + 4r - s - t + 2{,}31 = 0$	$+155$	-1	$+44$	$+65$
$-r + 2s - t - 0{,}26 = 0$	-26	$+13$	$+58$	$+58$
$-q - r - s + 3t + 1{,}71 = 0$	$+95$	$+134$	-1	$+20$

$r-16$	$s-37$	$t-24$	$r-15$	$q-14$	$s-20$	$t-17$	$r-13$	$s-15$	$q-7$
-28	-28	-28	-13	$+1$	$+1$	$+1$	$+14$	$+14$	$+21$
$+16$	$+16$	$+40$	$+55$	-1	-1	$+16$	$+29$	$+29$	$+1$
$+1$	$+38$	$+62$	$+2$	$+16$	$+36$	$+53$	$+1$	$+16$	$+23$
$+74$	0	$+24$	$+39$	$+39$	-1	$+16$	$+29$	-1	-1
$+36$	$+73$	$+1$	$+16$	$+30$	$+50$	-1	$+12$	$+27$	$+34$
$t-17$	$r-8$	$p-9$	$q-7$	$s-9$	$r-7$	$t-10$	$q-4$	$p-7$	$r-5$
$+21$	$+29$	$+2$	$+9$	$+9$	$+16$	$+16$	$+20$	-1	$+4$
$+12$	$+20$	$+29$	$+1$	$+1$	$+8$	$+18$	$+2$	$+9$	$+14$
$+34$	$+2$	$+11$	$+18$	$+27$	-1	$+9$	$+13$	$+20$	0
$+10$	$+18$	$+18$	$+18$	0	$+7$	$+17$	$+17$	$+17$	$+22$
$+1$	$+9$	$+9$	$+16$	$+25$	$+32$	$+2$	$+6$	$+6$	$+11$
$s-11$	$t-7$	$q-5$	$r-5$	$p-4$	$s-6$	$t-5$	$r-4$	$q-5$	$p-3$
$+4$	$+4$	$+9$	$+14$	$+2$	$+2$	$+2$	$+6$	$+11$	$+2$
$+14$	$+21$	$+1$	$+6$	$+10$	$+10$	$+15$	$+19$	-1	$+2$
$+11$	$+18$	$+23$	$+3$	$+7$	$+13$	$+18$	$+2$	$+7$	$+10$
0	$+7$	$+7$	$+12$	$+12$	0	$+5$	$+9$	$+9$	$+9$
$+22$	$+1$	$+6$	$+11$	$+11$	$+17$	$+2$	$+6$	$+11$	$+11$
$t-3$	$r-3$	$s-7$	$t-4$	$q-3$	$r-4$	$p-4$	$s-4$	$t-4$	$q-3$
$+2$	$+5$	$+5$	$+5$	$+8$	$+12$	0	0	0	$+3$
$+5$	$+8$	$+8$	$+12$	0	$+4$	$+8$	$+8$	$+12$	0
$+13$	$+1$	$+8$	$+12$	$+15$	-1	$+3$	$+7$	$+11$	$+14$
$+12$	$+15$	$+1$	$+5$	$+5$	$+9$	$+9$	$+1$	$+5$	$+5$
$+2$	$+5$	$+12$	0	$+3$	$+7$	$+7$	$+11$	-1	$+2$
$r-3$	$s-4$	$t-3$	$r-2$	$p-2$	$q-2$	$r-1$	$s-3$	$t-2$	$r-1$
$+6$	$+6$	$+6$	$+8$	$+2$	$+4$	$+5$	$+5$	$+5$	$+6$
$+3$	$+3$	$+6$	$+8$	$+10$	$+2$	$+3$	$+3$	$+5$	$+6$
$+2$	$+6$	$+9$	$+1$	$+3$	$+5$	$+1$	$+4$	$+6$	$+2$
$+8$	0	$+3$	$+5$	$+5$	$+5$	$+6$	0	$+2$	$+3$
$+5$	$+9$	0	$+2$	$+2$	$+4$	$+5$	$+8$	$+2$	$+3$

Da nun diesen 54 Interpolationen noch etwa ebenso viele folgen müssten, bis man die übrigbleibenden Constanten vernachlässigen könnte, so hat die ganze Rechnung höchstens an Bequemlichkeit gewonnen. Summiert man bis jetzt erhaltene p_2, p_3, p_4 u. s. w., so erhält man

$p_1 = \Sigma\,(p) = -\ 0{,}29$,	während wirklich	$p_1 = -\ 0{,}39$
$q_1 = \Sigma\,(q) = +\ 0{,}05$,	„ „	$q_1 = -\ 0{,}05$
$r_1 = \Sigma\,(r) = -\ 1{,}26$,	„ „	$r_1 = -\ 1{,}38$
$s_1 = \Sigma\,(s) = -\ 1{,}14$,	„ „	$s_1 = -\ 1{,}30$
$t_1 = \Sigma\,(t) = -\ 1{,}35$,	„ „	$t_1 = -\ 1{,}48$

werden müssen laut No. 22.

24. Nun lässt sich aber mit Hülfe eines sehr energisch wirkenden „Kunstgriffs“ nicht allein die Menge der Interpolationen sehr erheblich verringern, sondern auch zugleich eine beständige Controle über die Richtigkeit der Rechnung gewinnen, Vortheile, welche, verbunden mit der Bequemlichkeit der Rechnung, die Methode sehr empfehlenswerth machen dürften.

In den ursprünglichen Gleichungen bedeuteten 115,52 Fuss und 177,04 Fuss die gemessenen Höhen der Bahnhöfe zu B und H über dem Nullpunkt des Pegels der Nordsee zu A. Man hätte aber auch den Nullpunkt eines andern Pegels zum Ausgangspunkt des Nivellements machen können, von dem man annimmt, dass er n Fuss unter dem Pegel der Nordsee bei A liegt; die Grösse von n ist dabei ganz gleichgültig. Denkt man sich aber von jetzt an unter p, q, r, s, t die Höhen der Bahnhöfe über diesem zweiten Nullpunkt, so werden die ursprünglichen Gleichungen sich verwandeln in

$$\begin{aligned}
115{,}52 &= -n + p \\
60{,}12 &= -p + q \\
177{,}04 &= -n + q \\
234{,}12 &= -p + r \\
171{,}00 &= -q + r \\
632{,}25 &= -r + s \\
-\ 211{,}01 &= -s + t \\
596{,}12 &= -q + t \\
427{,}18 &= -r + t
\end{aligned}$$

indem aus allen Gleichungen, welche Niveau-Unterschiede der Bahnhöfe unter einander repräsentieren, der Werth n verschwindet.

Mit Hülfe der frühern Näherungswerthe in No. 22, nämlich

$p = 116 + p_1$, $q = 177 + q_1$, $r = 350 + r_1$, $s = 984 + s_1$, $t = 775 + t_1$ erhält man sofort die abgekürzten Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
-0{,}48 &=& -n + p_1 \\
-0{,}88 &=& -p_1 + q_1 \\
0{,}04 &=& -n - q_1 \\
0{,}12 &=& -p_1 + r_1 \\
-2{,}00 &=& -q_1 + r_1 \\
-1{,}75 &=& -r_1 + s_1 \\
-2{,}01 &=& -s_1 + t_1 \\
-1{,}88 &=& -q_1 + t_1 \\
+2{,}18 &=& -r_1 + t_1
\end{array}$$

Aus ihnen bilde man in bekannter Weise die Normalgleichungen und löse sie nach der in No. 23 gezeigten Methode, so wird man nach überraschend kurzer Arbeit am gewünschten Ziele sich befinden. Unter Weglassung aller Accente und der Decimalstriche hat man

	$q+76$	$r-39$	$t-45$
$2n - p - q - 0{,}44 = 0$	-120	-120	-120
$-n + 3p - q - r - 0{,}28 = 0$	-104	-65	-65
$-n - p + 4q - r - t - 3{,}04 = 0$	0	$+39$	$+84$
$-p - q + 4r - s - t + 2{,}31 = 0$	$+155$	-1	$+44$
$-r + 0s - t - 0{,}26 = 0$	-26	$+13$	$+58$
$-q - r - s + 3t + 1{,}71 = 2$	$+95$	$+134$	-1

$n+60$	$p+42$	$s-29$	$n+21$	$q+10$	$p+10$	$n+10$	$q+5$	$p+5$	$t-4$
0	-42	-42	0	-10	-20	0	-5	-10	-10
-125	$+1$	$+1$	-20	-30	0	-10	-15	0	0
$+24$	-18	-18	-39	$+1$	-9	-19	$+1$	-4	0
$+44$	$+2$	$+31$	$+31$	$+21$	$+11$	$+11$	$+6$	$+1$	$+5$
$+58$	$+58$	0	0	0	0	0	0	0	$+4$
-1	-1	$+28$	$+28$	$+18$	$+18$	$+18$	$+13$	$+13$	$+1$

$n+5$	$p+2$	$q+2$	$n+2$	$s-2$	$p+1$	$q+1$	$n+1$
0	-2	-4	-0	0	-1	-2	0
-5	$+1$	-1	-3	-3	0	-1	-2
-5	-7	$+1$	-1	-1	-2	$+2$	$+1$
$+5$	$+3$	$+1$	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	$+1$
$+4$	$+4$	$+4$	$+4$	0	0	0	0
$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	0	0

Schon jetzt, nach 21 Interpolationen ergiebt die Substitution nicht mehr ganze Einheiten der zweiten Decimlstelle, und ist deshalb mit Recht abzubrechen.

Man hat alsbald

$$\begin{array}{lll}
\Sigma\,(n) = +\,60 + 21 + 10 + 5 + 2 + 1 & = +\,0{,}99 & = n \\
\Sigma\,(p) = +\,42 + 10 + 5 + 2 + 1 & = +\,0{,}60 & = p_1 \\
\Sigma\,(q) = +\,76 + 10 + 5 + 2 + 1 & = +\,0{,}94 & = q_1 \\
\Sigma\,(r) = -\,39 & = -\,0{,}39 & = r_1 \\
\Sigma\,(s) = -\,29 - 2 & = -\,0{,}31 & = s_1 \\
\Sigma\,(t) = -\,45 - 4 & = -\,0{,}49 & = t_1
\end{array}$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{array}{llll}
-n + p_1 = -\,0{,}39, & \text{mithin} & p = 116 - 0{,}39 + n & = 115{,}61 + n \\
-n + q_1 = -\,0{,}05, & \text{„} & q = 177 - 0{,}05 + n & = 176{,}95 + n \\
-n + r_1 = -\,1{,}38, & \text{„} & r = 350 - 1{,}38 + n & = 348{,}62 + n \\
-n + s_1 = -\,1{,}30, & \text{„} & s = 984 - 1{,}30 + n & = 982{,}70 + n \\
-n + t_1 = -\,1{,}48, & \text{„} & t = 775 - 1{,}48 + n & = 773{,}52 + n
\end{array}$$

wo aber die p, q, r, s, t noch die neuen Bedeutungen, nämlich der Höhen der Bahnhöfe über dem veränderten Nullpunkt haben, welcher n Fuss unter dem frühern der Annahme gemäss liegen sollte. Giebt man also den p, q, r, s, t die alten Bedeutungen wieder, indem man überall n Fuss subtrahiert, so erhält man wie vorhin

$p =$	Höhe des Bahnhofs in	B	über dem Pegel in A	$= 115{,}61$	Fuss
$q =$	„ „ „ „	H	„ „ „ „ „	$= 176{,}95$	„
$r =$	„ „ „ „	L	„ „ „ „ „	$= 348{,}62$	„
$s =$	„ „ „ „	G	„ „ „ „ „	$= 982{,}70$	„
$t =$	„ „ „ „	W	„ „ „ „ „	$= 773{,}52$	„

also genau dieselben Werthe, welche vorhin (21) das directe Eliminationsverfahren ergab.

25. Es wird den Anfänger interessieren zu erfahren, dass die in No. 23 und 24 entwickelten Methoden von Gauss herrühren, welcher die Idee zu der zuerst mitgetheilten Methode einmal gelegentlich hinwarf, ohne sich länger dabei aufzuhalten. Später aufmerksam gemacht auf das Langwierige des Verfahrens, gab er zu, in praxi selbst sie noch nicht befolgt zu haben, vielmehr hätte er nur gedacht, dass man auf die Weise es sich bequem machen könne. Dann aber einen Augenblick sich besinnend, gab er unmittelbar darauf die in No. 24 dargestellte Verbesserung an, und nun die Entwickelung und Folgen dieses „Kunstgriffs“ mit raschem Blick überfliegend, erklärte er alsbald zuversichtlich, obgleich es den Anschein hätte, als ob man durch die Vermehrung der Unbekannten „vom Pferd auf den Esel“ käme, so würde man doch

finden, dass die jetzt möglich gewordene Sicherheit und Schnelligkeit des Verfahrens nichts mehr zu wünschen übrig lasse. Er legte übrigens auf diese unter Umständen (siehe die Ausgleichung der Horizontalwinkel in No. 28) doch höchst willkommene und dabei höchst geistreiche Idee so wenig Gewicht, dass er meinte, sie öffentlich mitzutheilen verlohne sich nicht der Mühe, „da Jeder, der mit solchen Rechnungen ernsthaft zu thun bekäme, sich selbst derartige Erleichterungen erfinden könne". Doch fügte er scherzend hinzu, einigen Leuten würde das allerdings schwerer als andern, da selbst die Einführung von Näherungswerthen in die Rechnung, so nahe die Veranlassung dazu auch läge, besonders wenn „krause Brüche" in den Gleichungen aufträten, schon Manchem als neu vorgekommen wäre. Es stammen diese Aeusserungen des grossen Mannes aus Vorträgen, welche er im Winter 1843 vor einem kleinen Kreise von Zuhörern hielt; da die Methode bisher nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint (ungeachtet Gerling in seinem geschätzten Werk über die Ausgleichungs-Rechnungen sie gebührend hervorhebt und gerade ihre passende Anwendung auf Horizont-Abschlüsse betont, erwähnt die „United States Coast Survey" in ihrem Report von 1854 in einer ausführlichen Darlegung der Gauss'schen Methoden dieser Idee mit keinem Wort, obschon die ersten Beispiele dort auch die Ausgleichung der Horizontalwinkel behandeln), so glaubte ich dem practischen Rechner durch diese ausführliche Mittheilung einen Dienst zu erzeigen. Es steht zu erwarten, dass die Herausgabe der nachgelassenen Schriften des „princeps mathematicorum" manche Goldstufe zu Tage fördern wird.

26. Bei näherer Prüfung wird man leicht entdecken, worin der Grund der oben erwähnten Controle über die Richtigkeit der Rechnung zu suchen ist. Durch die Einführung der Grösse $-n$ in die ursprünglichen Gleichungen (so gut, wie hier dem n eine reelle Bedeutung untergelegt ist, wird man es auch in andern Fällen können, vergl. spätere Aufgaben) wird jetzt nämlich bewirkt, dass bei den behuf Bildung der Normalgleichungen vorzunehmenden Multiplicationen der Gleichungen mit dem Factor derjenigen Unbekannten, in Bezug auf welche man differentiert, alle Glieder der Gleichungen ebenso häufig positiv als negativ genommen werden müssen, und als nothwendige Folge der alsdann vorzunehmenden Additionen der zusammengehörigen Glei-

chungen, die Summe sowohl der Constanten als der Factoren der Unbekannten 0 wird. Es wird aber, wie ein Blick auf die Normalgleichungen in No. 24 in der That zeigt, nicht bloss die algebraische Summe der Normalgleichungen zu Null, sondern es bleibt dann auch nach jeder Interpolation die Summe der Constanten Null, und um sich also jeden Augenblick von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt halten zu dürfen, bedarf es nur eines Blicks auf die Summe der letzten Ziffern rechts, resp. der niedrigsten Decimalziffern in den einzelnen kleinen Spalten.

Und weil endlich in der Interpolationsrechnung allen Unbekannten p, q, r, s, t die Correctionen des n zu Gute kommen, so folgt, dass gerade durch sie die Menge der Interpolationen, und zwar durchschnittlich im umgekehrten Verhältniss mit der Menge der Unbekannten, abnehmen muss.

27. Gesetz der Ausdehnung von Flüssigkeiten durch die Wärme.

Mit steigender Wärme nimmt bekanntlich das Volumen der meisten Körper, besonders der Flüssigkeiten, zu. Denkt man sich das Volumen eines Körpers bei 0^0 Temperatur $= 1$, so würde man es bei t^0 ausdrücken können durch $1 + pt$, vorausgesetzt dass die Zunahme des Volumens der Zunahme der Wärme proportional wäre und die Zahl p die Volumenvergrösserung für je einen Grad vorstellte. Indessen tritt dieser Fall nur bei wenigen Körpern und selbst dann auch nur ein, so lange gewisse Temperaturgrenzen, z. B. von 0^0 bis 20^0, von 0^0 bis 50^0 oder bis 100^0, nicht überschritten werden. Ist aber die Zunahme des Volumens auch nicht proportional der Zunahme der Wärme, so bleibt sie doch von ihr abhängig, und kann in solchem Fall der Ausdruck $1 + pt + qt^2$, oder selbst $1 + pt + qt^2 + rt^3$ ein der Wärme entsprechender Werth des Volumens sein.

Solche Constanten p, q, r zu ermitteln, ist Sache einer Rechnung, die sich auf die bei bestimmten Temperaturen beobachteten Volumina eines Körpers bezieht.

Nach Buff, Kopp und Zamminer, Lehrbuch der phys. und theoret. Chemie S. 199 hat Regnault für das Volumen des Quecksilbers folgende Werthe erhalten:

bei 50^0	 1,009013	bei 250^0	 1,046329
„ 100^0	 1,018153	„ 300^0	 1,055973
„ 150^0	 1,027419	„ 350^0	 1,065743,
„ 200^0	 1,036811		

wobei zu bemerken ist, dass die Temperaturen mit dem Luftthermometer gemessen sind, und das Volumen des Quecksilbers bei $0^0 = 1$ gesetzt ist. Es genügt nun für Quecksilber, wie man am Schluss aus der erhaltenen Formel sich überzeugen kann, die Volumveränderung von der zweiten Potenz der Temperaturgrade sich abhängig zu denken, also im Allgemeinen sein Volumen durch $1 + pt + qt^2$ auszudrücken. Bedenkt man nun, dass die in No. 17 aufgeführten $M_1, M_2 \ldots$ hier die Werthe 1,009013, 1,018153 u. s. w. haben, ferner das frühere a hier t, b hier t^2 genannt ist, so erhellt sofort die Richtigkeit der Gleichungen:

$$1{,}009013 = 1 + 50\,p + 2500\,q$$
$$1{,}018153 = 1 + 100\,p + 10000\,q \text{ u. s. f.},$$

welche alsbald auf die Form kommen:

$$\begin{aligned}
0{,}009013 &= 50\,p + 2500\,q \\
0{,}018153 &= 100\,p + 10000\,q \\
0{,}027419 &= 150\,p + 22500\,q \\
0{,}036811 &= 200\,p + 40000\,q \\
0{,}046329 &= 250\,p + 62500\,q \\
0{,}055973 &= 300\,p + 90000\,q \\
0{,}065743 &= 350\,p + 122500\,q.
\end{aligned}$$

Hat man aberursprüngliche Gleichungen von der Form

$$M_1 = a_1 p + b_1 q$$
$$M_2 = a_2 p + b_2 q \text{ u. s. f.},$$

so werden die Normalgleichungen die allgemeine Form annehmen:

$$[aM] = [a^2]p + [ab]q$$
$$[bM] = [ab]p + [b^2]q.$$

Die Rechnung für diese Summen ordne man nun also:

$[aM]$	$[bM]$	$[a^2]$	$[ab]$	$[b^2]$
0,450650	22,532500	2500	125000	6250000
1,815300	181,530000	10000	1000000	100000000
4,112850	616,927500	22500	3375000	506250000
7,362200	1472,440000	40000	8000000	1600000000
11,582250	2895,562500	62500	15625000	3906250000
16,791900	5037,570000	90000	27000000	8100000000
23,010050	8053,517500	122500	42875000	15006250000
65,125200	18280,080000	350000	98000000	29225000000
$= [aM]$	$= [bM]$	$= [a^2]$	$= [ab]$	$= [b^2]$

Man hat jetzt die beiden Normalgleichungen:

$$65{,}1252 = 35\,0000\,p + 9800\,0000\,q$$
$$18280{,}0800 = 9800\,0000\,p + 292\,2500\,0000\,q$$

Setzt man, um die grossen Zahlen zu vermeiden, zunächst

$$10000\,p = p_1$$
$$100\,0000\,q = q_1,$$

so findet man leicht

$$p_1 = 1{,}7900\,950$$
$$q_1 = 0{,}0252\,235, \text{ also}$$
$$p = 0{,}0001\,7900\,950$$
$$q = 0{,}0000\,0002\,5223\,5.$$

Darnach lautet die Gleichung für das Volumen V des Quecksilbers bei einer gewissen Temperatur von t^0, das Volumen bei $0^0 = 1$ gesetzt,

$$V = 1 + 0{,}0001\,7900\,950\,t + 0{,}0000\,0002\,5223\,5\,t^2$$

Die Constanten weichen etwas ab von den im oben genannten Werke S. 203 genannten, höchst wahrscheinlich, weil den dort aufgeführten andere ursprüngliche Data zu Grunde gelegen haben, indem die Beobachtungen nicht in der That bei jenen abgerundeten Temperaturzahlen angestellt sind. Dort ist $p = 0{,}0001\,7900\,7$, $q = 0{,}0000\,0002\,5231\,6$.

Dass die Entwickelung der Function beim Gliede mit t^2 aufhören darf, erklärt sich aus der Kleinheit des Factors von t^2.

Nach vorstehender Formel werden die übrigbleibenden Fehler

$$F_1 - M_1 = 0{,}000000$$
$$F_2 - M_2 = 0{,}000000$$
$$F_3 - M_3 = 0{,}000063$$
$$F_4 - M_4 = 0{,}000000$$

und die übrigen alle wieder 0. Dieselben Fehler lässt die in dem genannten Werke angezeigte Formel zurück.

In Müller's Physik Bd. II, S. 499 ist nun auch direct gesagt, dass die oben genannten, aus Beobachtungen von Regnault stammenden Werthe für M_1 u. s. f. durch Rechnung aus der Formel erhalten sind. Die Formeln ergeben aber für $t = 150^0$, $V = 1{,}027482$ statt $1{,}027419$. Es muss also da jedenfalls ein Irrthum vorliegen. Man könnte z. B. glauben, dass die Differenz von einem Druckfehler herrühre, und überhaupt 1,027482 lesen statt 1,027419. Allein die Einführung dieses um 0,000063 grössern Werthes verändert

$$\Sigma(aM) \text{ um } 0{,}009450$$
$$\Sigma(bM) \text{ um } 1{,}417500,$$

wodurch die Werthe für p und q sich stark verschieben. Man erhält

$$p = 0{,}0001\,7992\,13$$
$$q = 0{,}0000\,0002\,2063\,224.$$

28. Ausgleichung von Horizontalwinkeln.

Es sind gemessen eine Reihe Horizontalwinkel zwischen sieben Oertern, welche letztere der Einfachheit halber durch die Zahlen 1 bis 7 angedeutet werden mögen, da ihre wirkliche Bedeutung gleichgültig ist. Jeder Winkel ist ein Mittelwerth aus der beigeschriebenen Zahl von Beobachtungen; diese Zahlen werden später als die Gewichte der Messungen in die Gleichungen eingeführt.

Winkel zwischen	Gegebener Mittelwerth	aus .. Beobachtungen
1 und 2	101° 56′ 42″,125	20
1 „ 4	126° 43′ 6″,075	20
2 „ 3	18° 14′ 14″,600	10
2 „ 4	24° 46′ 24″,175	20
2 „ 5	27° 14′ 17″,528	9
2 „ 6	50° 22′ 7″,148	32
3 „ 4	6° 32′ 6″,775	10
3 „ 6	32° 7′ 52″,117	15
4 „ 5	2° 27′ 52″,950	10
4 „ 6	25° 35′ 44″,441	22
4 „ 7	45° 37′ 42″,375	20
5 „ 6	23° 7′ 49″,600	10
6 „ 7	20° 2′ 0″,250	22

Man wünscht nun diejenigen Werthe der Winkel 1 und 2, 1 und 3, 1 und 4, 1 und 5, 1 und 6, 1 und 7, welche am besten zu jenen Beobachtungen stimmen, um aus ihnen nach Bedarf auch andere Winkel, wie z. B. 2 und 3, 3 und 4 ... herleiten zu können. Die Rechnung würde demnach zunächst 6 Unbekannte umfassen. Sie stecken in den folgenden ursprünglichen Gleichungen, in welchen $p = \sphericalangle 1 \ldots 2$, $q = \sphericalangle 1 \ldots 3$, $r = \sphericalangle 1 \ldots 4$ u. s. w. ist.

$$\begin{array}{rcllllll}
101^{0}56'42'',125 & = & +p & & & & & \\
126^{0}43'\ 6'',075 & = & & & +r & & & \\
18^{0}14'14'',600 & = & -p & +q & & & & \\
24^{0}46'24'',175 & = & -p & & +r & & & \\
27^{0}14'17'',528 & = & -p & & & +s & & \\
50^{0}22'\ 7'',148 & = & -p & & & & +t & \\
6^{0}32'\ 6'',775 & = & & -q & +r & & & \\
32^{0}\ 7'52'',117 & = & & -q & & & +t & \\
2^{0}27'52'',950 & = & & & -r & +s & & \\
25^{0}35'44'',441 & = & & & -r & & +t & \\
45^{0}37'42'',375 & = & & & -r & & & +u \\
23^{0}\ 7'49'',600 & = & & & & -s & +t & \\
20^{0}\ 2'\ 0'',250 & = & & & & & -t & +u.
\end{array}$$

Um die grossen Zahlen zu vermeiden, führe man vor aller weitern Arbeit Näherungswerthe ein, welche man als Mittelwerthe aus mehreren sich darbietenden Werthen auswählt. Man setze nämlich:

$$\begin{array}{llll}
p = 101^{0}56'42'' + p_1 & & s = 129^{0}10'59'' + s_1 \\
q = 120^{0}10'57'' + q_1 & & t = 152^{0}18'49'' + t_1 \\
r = 126^{0}43'\ 5'' + r_1 & & u = 172^{0}20'48'' + u_1.
\end{array}$$

Dadurch reducieren sich obige Gleichungen auf:

$$\begin{array}{rcllllll}
0'',125 & = & +p_1 & & & & & \\
1'',075 & = & & & +r_1 & & & \\
-\ 0'',400 & = & -p_1 & +q_1 & & & & \\
1'',175 & = & -p_1 & & +r_1 & & & \\
0'',528 & = & -p_1 & & & +s_1 & & \\
0'',148 & = & -p_1 & & & & +t_1 & \\
-\ 1'',225 & = & & -q_1 & +r_1 & & & \\
0'',117 & = & & -q_1 & & & +t_1 & \\
-\ 1'',050 & = & & & -r_1 & +s_1 & & \\
0'',441 & = & & & -r_1 & & +t_1 & \\
-\ 0'',625 & = & & & -r_1 & & & +u_1 \\
-\ 0'',400 & = & & & & -s_1 & +t_1 & \\
1'',250 & = & & & & & -t_1 & +u_1
\end{array}$$

Um nun auch sogleich Gebrauch zu machen von der wesentlichen Abkürzung der Berechnung von Gleichungen mit vielen Unbekannten, welche wir in No. 24 gezeigt haben, so geben wir die Richtung nach Ort 1 als Anfangsrichtung auf, und verlegen diese nach einem beliebigen Orte 0, welcher von dem Orte 1 um den $< 1.0 = n = \alpha + n_2$ entfernt liegt, indem α einen beliebigen Näherungswerth von n bedeutet. Ferner seien jetzt p_2, q_2, r_2 u. s. w. Näherungswerthe der ganzen Winkel 0 und 2, 0 und 3 u. s. f., von der neuen Anfangsrichtung aus gemessen, also $p_2 = n_2 + p_1$, $q_2 = n_2 + q_1$ u. s. f.; alsdann gehen die eben erhaltenen reducierten Gleichungen über in

$$\begin{aligned}
0{,}125 &= -n_2 + p_2 \\
1{,}075 &= -n_2 \qquad\qquad + r_2 \\
-0{,}400 &= \qquad -p_2 + q_2 \\
1{,}175 &= \qquad -p_2 \qquad + r_2 \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

unverändert wie vorhin, da das n_2 in allen folgenden Gleichungen ausfällt.

Bei der jetzt vorzunehmenden Bildung der Normalgleichungen bedenke man, dass nicht allein jede Gleichung mit dem Factor der Unbekannten, in Bezug auf welche man die Gleichung bildet, zu multiplicieren ist, sondern ausserdem noch mit der Zahl, welche das Gewicht der in ihr niedergelegten Messung bezeichnet. Um also die Normalgleichung in Bezug auf n zu bilden, hat man die erste Gleichung mit -1 und mit 20, d. h. mit -20, die zweite ebenfalls mit -20 zu multiplicieren und dann die beiden erhaltenen Gleichungen zu addieren. Die Normalgleichung in Bezug auf p erhält man durch Multiplication der ersten Gleichung mit $+20$, der dritten mit -10, der vierten mit -20, der fünften mit -9, der sechsten mit -32, und nachfolgende Addition. Da die Arbeit wegen der meist runden Zahlen wenig umfänglich ist, so erscheint es unnöthig, sie schematisch darzustellen. Die Normalgleichungen und ihre Lösung sieht man in folgender Zusammenstellung, in welcher die Indices der Unbekannten weggelassen sind, ebenso wie später die Decimalstriche, weshalb die Zahlenwerthe durch 1000 zu dividieren sind:

									$r + 451$
$+40n$	$-20p$		$-20r$				$+24{,}000$	$=0$	$+14980$
$-20n$	$+91p$	$-10q$	$-20r$	$-9s$	$-32t$		$+26{,}488$	$=0$	$+17468$
	$-10p$	$+35q$	$-10r$		$-15t$		$-6{,}495$	$=0$	-11005
$-20n$	$-20p$	$-10q$	$+102r$	$-10s$	$-22t$	$-20u$	$-46{,}068$	$=0$	-46
	$-9p$		$-10r$	$+29s$	$-10t$		$+1{,}748$	$=0$	-2762
	$-32p$	$-15q$	$-22r$	$-10s$	$+101t$	$-22u$	$+15{,}307$	$=0$	$+5385$
			$-20r$		$-22t$	$+42u$	$-15{,}000$	$=0$	-24020

$u+572$	$p-192$	$n-470$	$p-103$	$q+230$	$p+25$	$t+20$	$n-40$
$+14980$	$+18820$	$+20$	$+2080$	$+2080$	$+1580$	$+1580$	-20
$+17468$	-4	$+9396$	$+23$	-2277	-2	-642	$+158$
-11005	-9085	-9085	-8055	-5	-255	-555	-555
-11486	-7646	$+1754$	$+3814$	$+1514$	$+1014$	$+574$	$+1374$
-2762	-1034	-1034	-107	-107	-332	-532	-532
-7199	-1055	-1055	$+2241$	-1209	-2009	$+11$	$+11$
$+4$	$+4$	$+4$	$+4$	$+4$	$+4$	-436	-436

$r-13$	$q+12$	$s+14$	$n-6$	$p-3$	$u+4$	$r+1$	$n-1$
$+240$	$+240$	$+240$	0	$+60$	$+60$	$+40$	0
$+418$	$+298$	$+172$	$+292$	$+19$	$+19$	-1	$+19$
-425	-5	-5	-5	$+25$	$+25$	$+15$	$+15$
$+48$	-72	-212	-92	-32	-112	-10	$+10$
-402	-402	$+4$	$+4$	$+31$	$+31$	$+21$	$+21$
$+297$	$+117$	-23	-23	$+73$	-15	-37	-37
-176	-176	-176	-176	-176	-8	-28	-28

Da eine neue Interpolation keine volle Einheit der dritten Decimale mehr geben würde, so ist die Rechnung jetzt schon abzubrechen. Man erhält

$$n_2 = \Sigma(n) = -517, \quad p_2 = \Sigma(p) = -273, \quad q_2 = \Sigma(q) = +242$$
$$r_2 = \Sigma(r) = +439, \quad s_2 = \Sigma(s) = +14, \quad t_2 = \Sigma(t) = +20$$
$$u_2 = \Sigma(u) = +576,$$

und daraus unter Berücksichtigung, dass diese Zahlen Tausendtel Sekunden vorstellen, die Werthe

$$-n_2 + p_2 = +0'',244 = p_1$$
$$-n_2 + r_2 = +0'',956 = r_1$$
$$-p_2 + q_2 = +0'',515, \text{ also } -n_2 + q_2 = +0'',759 = q_1$$
$$-p_2 + s_2 = +0'',287, \quad \text{„} \quad -n_2 + s_2 = +0'',531 = s_1$$
$$-p_2 + t_2 = +0'',293, \quad \text{„} \quad -n_2 + t_2 = +0'',537 = t_1$$
$$-p_2 + u_2 = +0'',849, \quad \text{„} \quad -n_2 + u_2 = +1'',093 = u_1.$$

Daraus ergeben sich die Winkel, da $p = 101^0 56' 42'' + p$, u. s. w.:

$$p = 101^0 56' 42'',244 = \angle 1.2$$
$$q = 120^0 10' 57'',759 = \angle 1.3, \text{ also } \angle 2.3 = 18^0 14' 15'',515$$
$$r = 126^0 43' 5'',956 = \angle 1.4, \quad \text{„} \quad \angle 3.4 = 6^0 32' 8'',195$$
$$s = 129^0 10' 59'',531 = \angle 1.5, \quad \text{„} \quad \angle 4.5 = 2^0 27' 53'',575$$
$$t = 152^0 18' 49'',537 = \angle 1.6, \quad \text{„} \quad \angle 5.6 = 23^0 7' 50'',006$$
$$u = 172^0 20' 49'',093 = \angle 1.7, \quad \text{„} \quad \angle 6.7 = 20^0 1' 59'',556$$

als wahrscheinlichste Werthe derselben nach den vorliegenden Beobachtungen.

Durch Vergleichung der beobachteten Werthe mit den berechneten erhält man endlich die übriggebliebenen Fehler, und mit ihnen die Quadrate derselben, deren Minimum ein Kriterium für die Genauigkeit der Rechnung ist.

Beobachtete Winkel M	Berechnete Winkel F	Uebrigbl. Fehler $F-M$	Deren Quadrate $(F-M)^2$
101°56′42″,125	101°56′42″,244	+0″,119	0,014161
126 43 6 ,075	126 43 5 ,956	−0 ,119	0,014161
18 14 14 ,600	18 14 15 ,515	+0 ,915	0,837225
24 46 24 ,175	24 46 23 ,712	−0 ,463	0,214369
27 14 17 ,528	27 14 17 ,287	−0 ,241	0,058081
50 22 7 ,148	50 22 7 ,293	+0 ,145	0,021025
6 32 6 ,775	6 32 8 ,195	+1 ,420	2,016400
32 7 52 ,117	32 7 51 ,778	−0 ,339	0,114921
2 27 52 ,950	2 27 53 ,575	+0 ,625	0,390625
25 35 44 ,441	25 35 43 ,581	−0 ,860	0,739600
45 37 42 ,375	45 37 43 ,137	+0 ,762	0,580644
23 7 49 ,600	23 7 50 ,006	+0 ,406	0,164836
20 2 0 ,250	20 1 59 ,556	−0 ,694	0,481636

Folglich $\Sigma(F-M)^2 = 5{,}647684$.

29. Die normale mittlere Jahrestemperatur des Breitenparallels als Function der Breite des Parallels.

Dass im Allgemeinen ein Zusammenhang existiert zwischen der mittlern Jahrestemperatur eines Ortes und seiner Breite ist ebenso gewiss, als dass dieser Zusammenhang für alle Orte desselben Breitenparallels ein ausserordentlich verschiedener ist, je nach den besonderen Eigenthümlichkeiten der Lage des Ortes, besonders hinsichtlich seiner Länge und in Bezug auf terrestrische und atmosphärische Umgebung. Letztere hat Dove allgemein auch durch die Länge des Ortes zu charakterisieren versucht und nun von zu 10° zu 10° die mittleren Jahrestemperaturen von Oertern auf demselben Breitenparallel zusammengestellt, die Summe derselben durch 36 dividiert und die erhaltene Zahl die normale mittlere Jahrestemperatur des Breitenparallels genannt. Von 10 zu 10 Grad Breite finden sich seine Resultate in folgender Tabelle, die für nördliche Breite gilt, vereinigt:

Auf	0°	Breite	ist	die	normale	mittlere	Jahrestemperatur	21°,2	R.
„	10°	„	„	„	„	„	„	21°,3	„
„	20°	„	„	„	„	„	„	20°,2	„
„	30°	„	„	„	„	„	„	16°,8	„
„	40°	„	„	„	„	„	„	10°,9	„
„	50°	„	„	„	„	„	„	4°,3	„
„	60°	„	„	„	„	„	„	— 0°,8	„
„	65°	„	„	„	„	„	„	— 4°,2	„
„	70°	„	„	„	„	„	„	— 7°,1	„
„	80°	„	„	„	„	„	„	—11°,2	„
„	90°	„	„	„	„	„	„	—13°,2	„*)

Könnte man diese Angaben mit einigermaassen kleinem Fehler in eine Formel vereinigen, so hätte man leichte Mühe, um für jeden zwischenliegenden Parallel, d. h. für jede Ortsbreite die normale mittlere Jahrestemperatur sich zu berechnen. Der Unterschied der Temperatur des Parallels mit der mittleren Temperatur des einzelnen Ortes wäre dann die thermische Anomalie des Ortes.

Fasst man aber jene Angaben als Function der Breite auf, so genügt eine leichte Prüfung, dass die Form der Function, $p + q \cos \varphi$, ihnen nicht genügend entspricht, wenn man unter p die Temperatur am Pol, unter $q \cos \varphi$ die Menge Grade versteht, um welche die Temperatur auf der Breite φ gegen die am Pol zunimmt (daher die Wahl der Cosinus-Function in diesem und ähnlichen Fällen). Ein Näherungswerth von p wäre $-13^\circ{,}2$ für $\varphi = 90$, wofür $\cos \varphi = 0$; ginge man mit diesem Werth für p nach 60° Breite, so würde sich aus der Gleichung $-0{,}8 = -13{,}2 + \frac{1}{2} q$, für q der Näherungswerth $+24{,}8$ ergeben. Dass diese Werthe p und q den übrigen Temperaturen nicht gut entsprechen, ergiebt sich sofort. Wählt man dagegen für die zu bestimmende Function die allgemeine Form $p + q \cos \varphi + r \cos^2 \varphi$, so scheint diese bei vorläufiger Prüfung der Sache angemessener zu sein. Setzt man wieder $p = -13^\circ{,}2$ in die Gleichung für $\varphi = 60^\circ$, so

*) Vergl. Müller, kosmische Physik S. 300.

erhält man $-0{,}8 = -13{,}2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}r$, also $49{,}6 = 2q + r$, ferner in die Gleichung für $\varphi = 30^0$, so erhält man

$$\begin{aligned} 16{,}8 &= -13{,}2 + q.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{3}{4}r \\ 30{,}0 &= 0{,}86603\,q + \tfrac{3}{4}r \\ 120{,}0 &= 3{,}46412\,q + 3r. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich $q = 11{,}36$, $r = 26{,}88$. Diese Näherungswerthe für p, q, r würden nun die Gleichung für $\varphi = 50^0$, oder

$$4{,}3 = -13.2 + 11{,}36\cos 50 + 26{,}88\cos^2 50$$

verwandeln in

$$4{,}3 = -13{,}2 + 7{,}302 + 11{,}110 = 4{,}212,$$

so dass die beiden Seiten der Gleichung leidlich übereinstimmen.

Man hätte demnach die Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} 21{,}2 &= p + q\cos 0^0 + r\cos^2 0^0 \\ 21{,}3 &= p + q\cos 10^0 + r\cos^2 10^0 \\ 20{,}2 &= p + q\cos 20^0 + r\cos^2 20^0 \\ 16{,}8 &= p + q\cos 30^0 + r\cos^2 30^0 \\ 10{,}9 &= p + q\cos 40^0 + r\cos^2 40^0 \\ 4{,}3 &= p + q\cos 50^0 + r\cos^2 50^0 \\ -\ 0{,}8 &= p + q\cos 60^0 + r\cos^2 60^0 \\ -\ 4{,}2 &= p + q\cos 65^0 + r\cos^2 65^0 \\ -\ 7{,}1 &= p + q\cos 70^0 + r\cos^2 70^0 \\ -\ 11{,}2 &= p + q\cos 80^0 + r\cos^2 80^0 \\ -\ 13{,}2 &= p + q\cos 90^0 + r\cos^2 90^0. \end{aligned}$$

Verglichen mit der früher aufgestellten allgemeinen Form der ursprünglichen Gleichungen

$$M = ap + bq + cr$$

ergiebt sich, dass $M_1 = 21{,}2$, $M_2 = 21{,}3$ u. s. f. a überall $= 1$, $b_1 = \cos 0^0$, $b_2 = \cos 10^0$ u. s. f., $c_1 = \cos^2 0^0$, $c_2 = \cos^2 10^0$ u. s. f. ist. Die Einführung von Näherungswerthen für p, q, r verlohnt sich wegen der Kleinheit der Zahlen nicht.

Die Normalgleichungen würden demnach werden:

$$\begin{aligned} [M] &= [p] + [\cos\varphi]q + [\cos^2\varphi]r \\ [M.\cos\varphi] &= [\cos\varphi]p + [\cos^2\varphi]q + [\cos^3\varphi]r \\ [M.\cos^2\varphi] &= [\cos^2\varphi]p + [\cos^3\varphi]q + [\cos^4\varphi]r. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Factoren $[\cos\varphi]$, $[\cos^2\varphi]$, $[\cos^3\varphi]$, $[\cos^4\varphi]$ geschieht durch folgende Rechnung:

Breite	*log cos*	Zahl	*log cos*^{2}	Zahl	*log cos*^{3}	Zahl	*log cos*^{4}	Zahl
$\varphi = 0^0$	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000
$\varphi = 10^0$	9,99335	0,98481	9,98670	0,96985	9,98005	0,95511	9,97340	0,94060
$\varphi = 20^0$	9,97299	0,93969	9,94598	0,88302	9,91897	0,82977	9,89196	0,77973
$\varphi = 30^0$	9,93753	0,86603	9,87506	0,75000	9,81259	0,64952	9,75012	0,56250
$\varphi = 40^0$	9,88425	0,76604	9,76850	0,58682	9,65275	0,44953	9,53700	0,34436
$\varphi = 50^0$	9,80807	0,64279	9,61614	0,41318	9,42421	0,26558	9,23228	0,17071
$\varphi = 60^0$	9,69897	0,50000	9,39794	0,25000	9,09691	0,12500	9,79588	0,06250
$\varphi = 65^0$	9,62595	0,42262	9,25190	0,17861	8,87785	0,07548	8,50379	0,03190
$\varphi = 70^0$	9,53405	0,34202	9,06810	0,11698	8,60215	0,04001	8,13620	0,01368
$\varphi = 80^0$	9,23967	0,17365	8,47934	0,03015	7,71901	0,00524	6,95868	0,00091
$\varphi = 90$	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000
folglich	$[\cos\varphi]$ =	6,63765	$[\cos^2\varphi]$ =	5,17861	$[\cos^3\varphi]$ =	4,39524	$[\cos^4\varphi]$ =	3,90689

Ferner hat man:

Breite	$M.\cos\varphi$	$M.\cos^2\varphi$
$\varphi = 0^0$	21,2	21,2
$\varphi = 10^0$	20,9764	20,6578
$\varphi = 20^0$	18,9817	17,8370
$\varphi = 30^0$	14,5493	12,6000
$\varphi = 40^0$	8,3498	6,3963
$\varphi = 50^0$	2,7640	1,7767
$\varphi = 60^0$	− 0,4000	− 0,2000
$\varphi = 65^0$	− 1,7750	− 0,7502
$\varphi = 70^0$	− 2,4283	− 0,8306
$\varphi = 80^0$	− 1,9449	− 0,3377
$\varphi = 90^0$	0	
$[M.\cos\varphi]$ =	80,2730	78,3493 = $[M.\cos^2\varphi]$.

Die Normalgleichungen werden nun:

$$58{,}200 = 11{,}000p + 6{,}638q + 5{,}179r$$
$$80{,}273 = 6{,}638p + 5{,}179q + 4{,}395r$$
$$78{,}349 = 5{,}179p + 4{,}395q + 3{,}907r,$$

woraus sich ergeben $p = -13{,}913$, $q = +14{,}233$, $r = +22{,}545$.

Die gesuchte Gleichung ist also:

$$\text{Norm. mittl. Jahrestemp. d. Parallels} = -13{,}913^0 + 14{,}233^0 \cos\varphi + 22{,}545^0 \cos^2\varphi.$$

Die übrigbleibenden Fehler ersieht man aus folgender Zusammenstellung:

Breite	M	F	$F-M$	$(F-M)^2$
$\varphi = 0^0$	$21^0{,}2$	$22^0{,}865$	$+1^0{,}665$	2,772
$\varphi = 10^0$	21,3	21,971	+0,671	0,450
$\varphi = 20^0$	20,2	19,368	−0,832	0,692
$\varphi = 30^0$	16,8	15,322	−1,478	2,183
$\varphi = 40^0$	10,9	10,220	−0,680	0,462
$\varphi = 50^0$	4,3	4,551	+0,251	0,063
$\varphi = 60^0$	− 0,8	− 1,160	−0,360	0,130
$\varphi = 65^0$	− 4,2	− 3,872	+0,328	0,107
$\varphi = 70^0$	− 7,1	− 6,398	+0,702	0,493
$\varphi = 80^0$	− 11,2	− 10,762	+0,438	0,192
$\varphi = 90^0$	− 13,2	− 13,913	−0,713	0,508

folglich $\Sigma(F-M)^2 = 8{,}052$.

An den wechselnden Vorzeichen der Fehler ist zu erkennen, in welchem Grade veränderlich die Abhängigkeit der normalen mittleren Jahrestemperatur des Parallels von der Breite ist. Hätte man der Function eine andere Form gegeben, z. B. $p + q\cos^2\varphi$, oder $p + q\cos\varphi + r\cos^2\varphi + s\cos^3\varphi$, oder $p + q\cos^2\varphi + r\cos^4\varphi$ u. s. w., so würden die übrigbleibenden Fehler sich mit den neuen Werthen der Constanten p, q, r, s auch ändern. Die bezüglichen Rechnungen ergeben sich aus Vorstehendem zur Genüge.

30. Die Temperatur der Tiefe als Function der Tiefe. Die Zunahme der Temperatur als eine das tiefere Eindringen in das Erdinnere begleitende Thatsache ist seit Langem bekannt; in früheren Zeiten gab der Bergbau, in neueren Zeiten ausserdem das Bohren der artesischen Brunnen Gelegenheit zur Beobachtung. Natürlich schwanken die Ergebnisse der Beobachtungen nach der angewandten Sorgfalt, der chemischen Beschaffenheit der durchdrungenen Massen, ihren Verbindungen mit anderen Gegenden, Höhe über dem Meeresniveau, nach der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche u. s. w. Gewöhnlich drückt man die

Temperaturzunahme aus, indem man angiebt, dass man eine bestimmte Menge Meter hinabsteigen muss, damit das Thermometer um 1° Celsius steige. Ein Mittelwerth ist 30^m auf 1° C. Humboldt, Kosmos Bd. IV, S. 237, gibt 91 bis 99 Fuss an; die Angaben schwanken.

Sehr zuverlässige Beobachtungen haben Arago und Walferdin über diesen Gegenstand angestellt, bei Gelegenheit der Bohrung des artesischen Brunnens zu Grenelle, der durch das grosse Kreidelager von Paris bis zu einer Tiefe von 517^m unter das Niveau des Meeres hinabgeführt ist, mithin eine der grössten absoluten bekannten Tiefen in der festen Erdkruste erreicht. Sie berechneten aus den in verschiedenen Tiefen erhaltenen Temperaturen, um wieviel Meter man von Schicht zu Schicht hinabsteigen müsse, damit das Thermometer um 1° C. steige; im Mittel erhalten sie $32^m.5$ auf 1° C.; einzelne Werthe divergieren von 21^m zu 62^m.

Trotz dieser Schwankung lässt sich, indem man die Frage umkehrt und nach der Temperaturerhöhung für je um 1^m steigende Tiefe fragt, die Temperaturerhöhung als Function der Tiefe darstellen, und zwar erhält man eine Formel, welche sich den wirklich beobachteten Temperaturen in den gemessenen Tiefen sehr genau anschliesst. Man wird nur die Temperaturzunahme nicht im einfachen Verhältniss der Tiefe proportional setzen dürfen, der Function also nicht die Form

$$\textit{Temp.}\ \text{d. Tiefe} = \textit{Temp.}\ \text{d. Oberfläche} + p\,s,$$

sondern lieber gleich die Form

$$\textit{Temp.}\ \text{d. Tiefe} = \textit{Temp.}\ \text{d. Oberfläche} + p\,s + q\,s^2$$

geben müssen, indem man sich unter p den der Tiefe s, und unter q den dem Quadrat der Tiefe s proportionalen Antheil der Temperaturzunahme zu denken hat.

Die von Arago, Bd. VI, S. 310, deutsch von Hankel, am genannten Orte angestellten Beobachtungen, zu welchen wir noch einige in der Nähe von Paris erhaltene Data, die meistens sehr zuverlässig scheinen, hinzufügen, sind folgende:

Mittlere Jahrestemperatur von Paris	10°,60 Cels.		
Die Temperatur der Keller der Sternwarte	11°,71	in 28^m	Tiefe
„ „ des Springbrunnens v. St. Ouen	12°,90	in 66^m	„
„ „ des Brunnens von Selligue	16°,40	in 173^m	„
„ „ „ „ „ Grenelle	20°,00	in 248^m	„
„ „ „ „ „ „	22°,20	in 298^m	„

Die Temperatur des Brunnens von Grenelle 23°,75 in 400ᵐ Tiefe
" " " " " " 26°,43 in 505ᵐ "
" " " " " " 27°,70 in 548ᵐ "

Man erhält daraus die Gleichungen

$$11{,}71 = 10{,}6 + p\,.\;28 + q\,.\;28^2$$
$$12{,}90 = 10{,}6 + p\,.\;66 + q\,.\;66^2$$
$$16{,}40 = 10{,}6 + p\,.\;173 + q\,.\;173^2 \text{ u. s. f.}$$

oder, unter Beseitigung der Zahl 10°,6, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
1{,}11 &= 28\,p + 28^2\,q\\
2{,}30 &= 66\,p + 66^2\,q\\
5{,}80 &= 173\,p + 173^2\,q\\
9{,}40 &= 248\,p + 248^2\,q\\
11{,}60 &= 298\,p + 298^2\,q\\
13{,}15 &= 400\,p + 400^2\,q\\
15{,}83 &= 505\,p + 505^2\,q\\
17{,}10 &= 548\,p + 548^2\,q
\end{aligned}$$

Die Rechnung, beispielsweise ohne Logarithmen geführt, ergiebt zur Bildung der ersten Normalgleichung die partiellen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
31{,}08 &= 784\,p + 2\,1952\,q\\
151{,}80 &= 4356\,p + 28\,7496\,q\\
1003{,}40 &= 2\,9929\,p + 517\,7717\,q\\
2331{,}20 &= 6\,1504\,p + 1525\,2992\,q\\
3456{,}80 &= 8\,8804\,p + 2646\,3592\,q\\
5260{,}00 &= 16\,0000\,p + 6400\,0000\,q\\
7994{,}15 &= 25\,5025\,p + 1\,2878\,7625\,q\\
9370{,}80 &= 30\,0304\,p + 1\,6456\,6592\,q\\
\hline
\text{und}\quad 2\,9599{,}23 &= 90\,0706\,p + 4\,0455\,7966\,q\ \ldots\ \text{(I.)}
\end{aligned}$$

als erste Normalgleichung. Die zweite ergiebt sich aus der Addition der Gleichungen

$$\begin{aligned}
870{,}24 &= 2\,1952\,p + 614\,6564\,q\\
1\,0018{,}80 &= 28\,7496\,p + 1897\,4736\,q\\
17\,3588{,}20 &= 517\,7717\,p + 8\,9574\,5041\,q\\
57\,8137{,}60 &= 1525\,2992\,p + 37\,8274\,2016\,q\\
103\,0126{,}40 &= 2646\,3592\,p + 78\,8615\,0416\,q\\
210\,4000{,}00 &= 6400\,0000\,p + 256\,0000\,0000\,q\\
403\,7045{,}75 &= 1\,2878\,7625\,p + 650\,3775\,0625\,q\\
513\,5198{,}40 &= 1\,6456\,6592\,p + 901\,8249\,2416\,q\\
\hline
1306\,8985{,}39 &= 4\,0455\,7966\,p + 1934\,1000\,1814\,q\ \ldots\ \text{(II.)}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$p = 0{,}0420960$$
$$q = -\ 0{,}000020558$$

Mithin hat man

$$\textit{Temp.}\ \text{der Tiefe} = \text{Mittl. Jahrestemp. der Oberfläche} + 0{,}0420960\ .\ S - 0{,}000020558\ .\ S^2$$

Eine Vergleichung der beobachteten und berechneten Temperaturen in den genannten Tiefen beweist die ziemlich genaue Uebereinstimmung beider.

Tiefe	Beobachtete Temperatur	Berechnete Temperatur	$F - M.$	$(F - M)^2$
28m	11°,71 Cels.	11°,76	0°,05	0,0025
66	12°,90	13°,29	0°,39	0,1521
173	16°,40	17°,26	0°,86	0,7396
248	20°,00	19°,78	— 0°,22	0,0484
298	22°,20	21°,32	— 0°,88	0,7744
400	23°,75	24°,15	0°,40	0,1600
505	26°,43	26°,61	0°,18	0,0324
548	27°,70	27°,49	— 0°,21	0,0441
			$\Sigma\,(F - M)^2$ =	1,9535

Auch Temperaturen in andern Bohrlöchern folgen der genannten Formel, wie z. B. in Sheerness, wo die mittlere Bodentemperatur 10°,5 C. ist, und in 110m Tiefe 15°,5 gefunden wurde; die Formel giebt 14°,88. Ferner in Tours, wo die mittlere Bodentemperatur 11°,5 C. ist, und in 140m Tiefe 17°,5 gefunden wurde; die Formel ergiebt 17°,1. In dem berühmten Bohrloch von Neu-Salzwerk fand man in einer Tiefe von 301m 21°,5 C., bei einer mittleren Bodentemperatur von 10°. Die Formel ergiebt 20°,81. — Freilich Temperaturen wie in dem Bohrloch von Neuffen in Würtemberg, wo man in dem basaltischen Gestein in 385m Tiefe 38°,7 C. fand, folgen als Ausnahmen keiner Regel, sondern müssen nach ihren besonderen Umständen beurtheilt werden.

Dass die nicht convergente Form der Function eine Anwendung auf grosse Tiefen verbietet, leuchtet ohne Weiteres ein; da die Beobachtungen selbst sich nur auf, absolut genommen, geringe

Tiefen erstrecken, so wird überall jeder Schluss auf grosse Tiefen, z. B. von 1 Meile und darüber, sehr gewagt sein. Das negative Vorzeichen des dritten Gliedes zeigt an, dass die Temperatur der Tiefe nicht ganz so rasch als die Tiefe selbst zunimmt.

Ueber eine andere Formel für die Temperaturzunahme mit der Tiefe vgl. E. E. Schmid Meteorologie, Leipzig 1860, §. 119.

31. Die Grösse des mittleren Meridiangrades als Function der Breite.

Geschichtliche Vorbemerkungen.

Die Erforschung der Grösse und der Gestalt unserer Erde hat schon das wissenschaftlich gebildete Alterthum beschäftigt. Unter der als unbestritten angenommenen Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, deren Umfang man sich wie die Kreise in 360 Grade getheilt dachte, hat man sich schon mehrere hundert Jahre vor dem Anfang unserer Zeitrechnung bemüht, die absolute Grösse eines oder mehrerer Grade in nordsüdlicher Richtung zu bestimmen, um aus der Grösse eines Bruchtheils des Meridiankreises auf die Grösse des ganzen Meridians oder des Umfangs der Erdkugel zu schliessen. Da indessen die befolgten Methoden theils höchst bequemer Weise auf reine Speculationen und willkürliche Annahmen hinausliefen, oder wenn ihnen auch theilweise richtige Principien zum Grunde lagen, doch sehr mangelhaft ausgeführt wurden, und endlich die Maasse der Alten selbst uns nicht genau bekannt sind, so können wir die betreffenden Untersuchungen der alten Mathematiker nur als Versuche ansehen. So gab Aristoteles den Umfang der Erde an zu 400000 Stadien = etwa 9300 geographischen Meilen, Archimedes aber zu 300000 Stadien = etwa 6975 geographischen Meilen, beide, wie es scheint, nach ungefährer Schätzung. Mit mehr Berechtigung schloss Eratosthenes (um 230 v. Chr.) aus dem Umstande, dass zur Zeit des Solstitiums die Sonne zu Syene keinen Schatten warf, also im Zenith des Ortes stand, während sie gleichzeitig nach den Angaben des Gnomon zu Alexandrien um den 50sten Theil des Kreisumfangs, also um $7^1/_5$ Grad vom Zenith von Alexandrien entfernt blieb, dass Syene und Alexandrien um den 50sten Theil des Erdumfangs von einander entfernt lägen, der Erdumfang mithin, wenn diese Strecke nach den Angaben der Reisenden in nordsüdlicher Richtung 5000 Stadien gleich gerechnet werde, die Grösse von 250000 Stadien haben müsse = etwa 5817 geographische

Meilen. Noch näher der Wahrheit kam 200 Jahre später Posidonius, der aus den verschiedenen Meridianhöhen des Sterns Canopus zu Rhodus und Alexandrien sich den Breitenunterschied der genannten Oerter zu $7^1/_2$ Grad $= ^1/_{48}$ des Kreisumfangs ermittelte, natürlich ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung und auch in sonst unzuverlässiger Weise, sodann die Entfernung der Städte über See nach Schifferschätzung zu 5000 Stadien und ihren Längenunterschied gleich Null annahm, und so den Erdumfang zu 240000 Stadien = etwa 5580 geographischen Meilen bestimmte. In Toisen ausgedrückt, würde ein Meridiangrad nach Eratosthenes 66500 Toisen, nach Posidonius 63300 Toisen halten. Später scheint sich nur noch Ptolemäus mit dem theoretischen Theil der Frage beschäftigt zu haben; er machte die richtige Bemerkung, dass man nicht durchaus in der Richtung des Meridians messen müsse, sondern die gemessene Strecke auch einen Winkel mit demselben bilden dürfe, indem er durch seine Arbeiten über die Sehnentafeln wusste, dass man vermittelst des bekannten Winkels dann auch den Abstand in der Richtung des Meridians würde berechnen können.

Man kann nicht umhin anzuerkennen, dass der eine Theil der Untersuchung, die Ermittelung des Breitenunterschiedes auf astronomischem Wege, in einer richtigen, der Annahme der Kugelgestalt der Erde entsprechenden Weise, wenn auch mit unzulänglichen Hülfsmitteln ausgeführt wurde. Worin aber die Alten fehlten, und wodurch auch die späteren Messungen der Araber, ferner im sechszehnten Jahrhundert des Franzosen Fernel und später des Engländers Norwood unzuverlässig wurden, das war die Ermittelung der absoluten Entfernung auf der Erdoberfläche vermittelst unmittelbarer Messung durch Schritte, wie es die Mensores gemacht zu haben scheinen, oder durch die Umläufe des Rades eines in nordsüdlicher Richtung dahinfahrenden Wagens, wie man noch im Anfange des vorigen Jahrhunderts ziemlich häufig bei Wegmessungen verfuhr. Dass durch eine glückliche Compensation von Fehlern dann allerdings noch überraschend genaue Endresultate erhalten werden können, beweist gerade die Messung von Fernel, der die Grösse des Meridiangrades zwischen Paris und Amiens zu 57070 Toisen fand; Norwood freilich, welcher den Bogen zwischen London und York direct mit der Messkette maass, fand den dortigen Meridiangrad 57300, nach Anderen gar 57424 Toisen gross.

Einen wesentlichen Fortschritt in der Methode der Messung machte erst der auch sonst rühmlichst bekannte Snellius, welcher um 1615 vermittelst einer gut gemessenen Standlinie und darauf basierter Triangulierung die Strecke zwischen Alkmaar und Bergenopzoom maass und daraus den Meridiangrad zu 55074 Toisen bestimmte. Er entdeckte indessen selbst noch mehrere Fehler in seiner Arbeit, starb jedoch, bevor er die neue Rechnung vollendet hatte; erst 100 Jahr später ermittelte Muschenbroek aus Snellius Journal und nachdem er eine Reihe Winkel von Neuem gemessen, die Grösse des Meridiangrades zu 57033 Toisen, welches Resultat der Wahrheit ziemlich nahe kommt.

Nach dem Holländer Snellius sind es vorzugsweise Franzosen, welche bis in die neuere Zeit hinauf dem Problem der Gradmessung ausdauernde Aufmerksamkeit zugewandt haben, wenn auch die Ergebnisse ihrer Messung vor denen der Engländer, später noch der Deutschen und Russen gerade keinen Vorzug verdienen. Aber die Concentration der wissenschaftlichen Kräfte in der Akademie Frankreichs gab eine stets neue Anregung, und leitete von einer Verbesserung der Methoden zur andern, während gleichzeitig die Unterstützung von Seiten der Regierung, als auch deren Interesse erregt war, die materiellen Mittel gewährte, welche grössere Unternehmungen dieser Art erfordern. Hatte Snellius seine Dreiecke noch vielfach in einander geschoben und verwickelt, so fing man nachher an, sie möglichst neben einander zu legen, in der vorgeschriebenen Richtung fort, (man vergleiche die interessante Kartenskizze, welche Arago Bd. XIII, S. 256 von den französischen Dreiecken von Formentera bis Dünkirchen und weiter bis Greenwich giebt); statt wie Snellius gelegentlich Winkel durch Rechnung zu ermitteln, maass man jeden Winkel durch directe Ablesung und später noch durch oftmalige Repetition, als der Borda'sche Repetitionstheodolit zu den Messungen verwandt wurde (man vergl. Arago Bd. XIII, S. 202 u. ff.); man nahm ferner Rücksicht auf die verschiedenen Erhebungen der Dreieckspunkte und reducierte vor aller weitern Rechnung erst die Messungsresultate auf den Horizont; man behandelte die grösseren Dreiecke von nun als sphärische in Gemässheit der noch immer als richtig angenommenen Kugelgestalt der Erde, während Snellius mit einem bei seinen durchgängig kleinen Dreiecken allerdings verschwindend kleinen Fehler alle als eben betrachtet hatte; bestimmte sodann die Grösse des zu messenden Bogens, indem man einen Theil desselben nach dem andern aus den benachbarten Dreiecken ermittelte, statt wie Snellius den Bogen schliesslich aus einem einzigen Dreieck zu berechnen; endlich, nachdem in den angezeigten Richtungen der geodätische Theil der Messung verbessert war, corrigierte man auch den astronomischen Theil der Operationen nach den Hülfsmitteln und Grundsätzen, wie solche die sich von der Zeit her gerade so mächtig entwickelnde theoretische und praktische Astronomie nach und nach an die Hand gab.

Die Zahl der Gradmessungen mehrte sich mit der Verbesserung der Methoden und Instrumente. Zunächst verdienen genannt zu werden die für Newtons grosse Entdeckungen so bedeutsamen Messungen von Picard, der zwischen Paris und Amiens die Grösse des Meridiangrades zu 57060 Toisen fand; sie wurden fortgesetzt und erweitert durch Lahire, welcher zwischen Paris und Dünkirchen den Meridiangrad zu 56960, und durch Cassini den Jüngern, der auf dem Bogen zwischen Paris und Perpignan den Meridiangrad zu 57098 Toisen bestimmte. Da diesen wirklich ausgeführten Messungen zufolge die Grösse der Meridiangrade nach den Polen abzunehmen schien, während um dieselbe Zeit Newton und Huyghens aus der von ihnen aus allgemeinen Gründen hergeleiteten Abplattungstheorie eine Vergrösserung der Meridiangrade nach den Polen zu als nothwendig nachwiesen, so entspann sich über diese Meinungsdifferenz zunächst eine längere literarische Fehde, bis man auf den richtigen Gedanken kam, durch eine wiederholte Messung an zwei der Breite nach sehr verschiedenen Orten diese Frage auf empirischem Wege ein für allemal zu erledigen. So kamen zu Stande die wegen der Genauigkeit ihrer Resultate berühmt gewordene peruanische Gradmessung, welche Bouguer, Condamine und Godin vom Jahre 1735 an ausführten, und gleichzeitig die jetzt als incorrect beseitigte lappländische Gradmessung unter Leitung von Maupertius, Clairaut und dem Schweden Celsius. Durch diese Messungen wurde jeglicher Zweifel über die in Frage gestellte Thatsache gehoben; da die Grösse des Meridiangrades unter dem Aequator von Bouguer zu 56733 Toisen, und unter 66° Breite von Maupertius zu 57437 Toisen bestimmt wurde, so war die wachsende Grösse der Grade auf zunehmender Breite constatiert.

Natürlich veränderte sich mit dieser Erkenntniss auch das ganze Object der Untersuchung. Den bisherigen Gradmessungen hatte mehr oder minder entschieden die Voraussetzung zu Grunde gelegen, dass die Erde eine Kugel sei; mit der Veränderlichkeit der Grösse der Breitengrade fiel sofort diese Hypothese, und auch der Streit darüber, ob die Erde an den Polen zugespitzt sei, wie Cassini der Jüngere aus seiner Messung hatte folgern wollen — in unsern Tagen hat Herr Johannes von Gumpach mal wieder dasselbe behauptet — oder vielmehr an den Polen abgeplattet sei, wie Newton lehrte, war zu Gunsten der Annahme des letzteren entschieden. Da nun aber die Grösse der Abplattung sich ganz verschieden herausstellte, je nachdem man von der einen oder der andern Gradmessung ausging, so wurden eine ganze Reihe von Gradmessungen hauptsächlich zu dem Zweck unternommen, die wirkliche Grösse der Abplattung zweifellos zu ermitteln, und so die Frage nach der Grösse der Erde in eine Untersuchung über die Gestalt der Erde umgewandelt. Aber die Ergebnisse der zahlreichen jetzt begonnenen Gradmessungen — Lacaille am Cap der guten Hoffnung, Boscowich im Kirchenstaat und in Piemont, Mason und Dixon in Pennsylvanien, Liesganig in Oesterreich, alle in den Jahren 1750 bis 70, später noch 1790 Burrow in Ostindien — durchgängig nicht einmal mit der nöthigen Präcision und Ehrlichkeit ausgeführt, brachten so wenig Uebereinstimmung in den resultierenden Werth der Abplattung, als die mit den besten Hülfsmitteln und von den ausgezeichneten französischen Gelehrten Delambre, Méchain, Biot, Arago von 1793 bis 1808 ausgeführte zweite grosse französische Gradmessung — die bekanntlich zum Nebenzweck die Herstellung eines sogenannten Naturmaasses, des Meters, hatte — oder die englische Gradmessung von Mudge in den Jahren 1800 bis 1802, und die verbesserte schwedische, welche Svanberg in den Jahren 1801 bis 1803 leitete. Da die Grösse der Abplattung schliesslich aus Formeln hervorgeht, in denen die Grösse eines Breitengrades auf höherer Breite combiniert wird mit der Grösse eines Breitengrades auf niederer Breite, so fand man, je nachdem man diese oder jene Messung mit einander verband, auch verschiedene Werthe der Abplattung. Hatten somit schon die ersten genaueren Gradmessungen der Erde die Hypothese ihrer Kugelgestalt beseitigt, so musste man jetzt aus den nachfolgenden theilweise sehr genauen Gradmessungen den Schluss ziehen, dass auch ein genaues, durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid nicht mit der wirklichen Gestalt der Erde übereinstimme. Dennoch blieb, um mit den Worten von Laplace zu reden, ein Umdrehungs-Ellipsoid bei allen Ungleichheiten, welche die Gestalt der Erde bietet, die natürlichste und einfachste Hypothese. Deshalb vereinigten sich auch die französischen Mathematiker, welche mit der Bestimmung des Metermaasses beauftragt waren, in diesem Gedanken, entnahmen der peruanischen und der zweiten französischen Gradmessung von Delambre u. s. w. einen Werth der Abplattung zu $^1/_{354}$, folgerten aus derselben Messung in Frankreich ferner, dass der Meridianbogen vom Aequator bis zum Pol die Länge von 5130740 Toisen habe und nannten den zehnmillionsten Theil dieser Länge oder 0^t,513074 einen Meter (vergl. Laplace Mechanik des Himmels Bd. II, S. 176), gleichbedeutend mit 443,296 par. Linien, deren die sechsfüssige Toise 864 hat, (alle Angaben für den Fall, dass die Toise 16,25 Grad Celsius und der Meter gleichzeitig 0 Grad Temperatur habe). Damit haben die grösseren französischen Arbeiten in dieser Untersuchung gewissermaassen ihren Abschluss gefunden; die stattgehabten Messungen des Meridiangrades, in Verbindung mit der von Jacob Cassini schon unternommenen Messung des Parallelgrades zwischen Brest und Strassburg sind später zu der topographischen Aufnahme Frankreichs benutzt, Arbeiten, welche bei den erst in diesem Jahrhundert durchgeführten deutschen Gradmessungen sofort in Aussicht genommen waren.

Um soviel später aber die deutschen Mathematiker sich mit diesen Untersuchungen praktisch zu beschäftigen anfingen, um so viel Vollendeteres haben sie auch darin geleistet. Es genügt, die Namen Gauss, Schuhmacher, Bessel, ferner Struve zu nennen, um überzeugt sein zu können, dass wenn auch die Ausdehnung der in Deutschland gemessenen Bögen eine vergleichsweise geringe ist, dennoch die äusserste Genauigkeit in Messung wie Rechnung erzielt wurde, und ein Gleiches von der noch nicht beendeten grossen russischen Messung, welche sich von Lappland bis zum schwarzen Meere ausdehnt, zu rühmen ist. Die Verbesserungen an Instrumenten (Heliotrop von Gauss z. B.) oder in Methoden (Bessel's Winkelmessung durch einfache Ablesung z. B.) als nicht hierher gehörig übergehend und die Resultate der Messungen einer späteren Zusammenstellung vorbehaltend, müssen wir als einen besondern Fortschritt in der Rechnung die Annahme des mittlern Rotations-Ellipsoids betonen, wodurch die grosse Frage über die allgemeine Gestalt und Grösse der Erde endgültig abgeschlossen ist.

Neuerdings hat Baeyer in einer Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung eine Untersuchung der Abweichungen der Krümmung der Erdoberfläche und deren Ursachen angeregt, so dass also nicht mehr die specielle Krümmung, sondern auch die Beschaffenheit der Erdschichten an diesen Stellen zur Untersuchung verstellt wird.

Die nähere Auseinandersetzung der Hypothese Bessels wird zu einer besondern Auslassung über diesen Gegenstand führen.

32. Aeltere, besonders Laplace's Rechnungen über das mittlere Rotations-Ellipsoid.

Die verschiedenen im Vorigen kurz angeführten Gradmessungen sind in mannigfaltigster Weise combiniert worden, um aus ihnen den Betrag der Abplattung, den sogenannten Abplattungs-Coefficienten zu ermitteln. Dabei machte man aber die Erfahrung, dass jede neue Combination einen andern Abplattungs-Coefficienten gab. Um nur beispielsweise einige zu nennen, so erhielt man

aus der französichen und peruanischen Messung $^1/_{334}$, auch $^1/_{304}$
„ „ „ „ lappländischen „ $^1/_{145}$, auch $^1/_{178}$

je nach den angewandten Formeln, ferner aus einzelnen Gradmessungen durch Combination der nördlichen und südlichen Bögen, z. B.

aus der französischen . . . . . . $^1/_{150}$
aus der italienischen . . . . . . $^1/_{258}$
aus der englischen . . . . $^1/_{55}$ u. s. w.,

Beweis genug, dass entweder die Messungen von ungleichmässiger Güte, oder die Erde von unregelmässiger Gestalt sein müsse, abgesehen noch von der ungleichen Strenge der Rechnungsmethoden.

Durch diese grossen Abweichungen wurde nun Laplace zu der Idee geführt, nicht bloss zwei, sondern mehrere Gradmessungen mit einander zu verbinden, um durch ihre Ausgleichung zu einem mittleren Werth der Abplattung, und zunächst auch der Grösse der Erdmeridiane zu gelangen.

Gerade den hierauf bezüglichen Rechnungen schickt Laplace eine schon oben (§. 7) als Vorläuferinn der Methode der kleinsten Quadrate bezeichnete Methode vorauf, um sich über das Princip zu erklären, nach welchem die nothwendigen Ausgleichungen vorzunehmen seien. Von der Voraussetzung ausgehend, dass bei sämmtlichen Messungen Fehler vorgekommen seien, untersucht er zunächst, ob nach seiner Hypothese die Fehler innerhalb der möglichen Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben; die Fehler sucht er in dem geodätischen Theil der Messung, im geraden Gegensatze zu Gauss, Schmidt, Bessel, welche sie in dem astronomischen Theil, d. h. in den gemessenen Zenithdistanzen der zur Bestimmung der Breite oder des Breitenunterschiedes benutzten Sterne suchen. Eine fernere Annahme ist, dass die Meridiane Ellipsen, die Erde ein Rotations-Ellipsoid ist, also die Meridiangrade vom Aequator nach den Polen hin im Verhältniss des Quadrats der Sinus der Breiten wachsen, der allgemeine Ausdruck für die Grösse eines Meridiangrades mithin $z + p \sin^2 \varphi$ sei, wo z die Grösse des Meridiangrades unter dem Aequator und $p \sin^2 \varphi$ die Vergrösserung desselben auf der Breite φ bedeute. Diese Formel $z + p \sin^2 \varphi$ wendet Laplace nun auf 7 Gradmessungen an, um durch sie zunächst zu ermitteln, ob die Annahme der elliptischen Gestalt der Erde überhaupt statthaft sei; dann aber auch, um diejenige Ellipse zu erkennen, „welche aus den gemessenen Graden mit der grössten Wahrscheinlichkeit folgt." Diese letztere Ellipse scheint ihm zufolge folgende Bedingungen erfüllen zu müssen: „erstens dass die Summe der Fehler, welche in den Messungen der ganzen gemessenen Bögen begangen worden, gleich Null ist; zweitens dass die Summe dieser, sämmtlich positiv genommenen, Fehler ein Kleinstes ist. Führt man alsdann die ganzen Bogen in Rechnung, statt der Grade, welche man daraus hergeleitet hat, so giebt man jedem dieser Grade um desto mehr Einfluss auf die Ellipticität, welche hieraus für die Erde folgt, je beträchtlicher dieser Bogen ist, wie dies auch sein muss". Nach unserer Ausdrucksweise giebt er also jeder der erhaltenen Gleichungen als Gewicht die Länge des in ihr enthaltenen Bogens in Graden ausgedrückt.

So richtig wie nun auch der Grundgedanke nach den damaligen Erfahrungen ist, so scheiterte die befriedigende Lösung der vorliegenden Frage doch theils an der Ungenauigkeit der zu Grunde gelegten Messungen, theils an der Mangelhaftigkeit der Methode, worüber schon oben gesprochen ist. Um indessen das reiche hier gebotene Material zur Uebung in der Methode der kleinsten Quadrate zu benutzen, vergleichen wir zunächst Laplace's Resultate mit den Resultaten, wie sie unsere verbesserte Methode liefert; wir werden im Verfolg dann unter Zugrundelegung der von Bessel geprüften Data der die scharfe Prüfung vertragenden Gradmessungen eine neue Rechnung vorführen, welche in Anlehnung an die Ideen von Laplace den Resultaten, welche Bessel gefunden hat, sehr nahe zu kommen gestattet.

33. Die sieben Gradmessungen, von welchen Laplace ausgeht, sind in Theilen des Maassstabes ausgedrückt, auf welchen man den von Dünkirchen bis Barcelona zur Bestimmung der Fundamentaleinheit der Maasse und Gewichte gemessenen Bogen bezogen hat; er ist das Doppelte der Toise, deren sich Bouguer in Peru bediente, und wird mit R bezeichnet. Das Nothwendige über die Gradmessungen selbst findet sich in folgender Zusammenstellung.

Name der Gradmessung.	Grösse des gemessenen Bogens.	Mittlere Breite des Bogens.	Die durchschnittliche Grösse eines Grades.
1. Messung in Peru, von Bouguer	$3^0,4633$	0^0	$25538^R,85$
2. „ am Cap d. g. Hoffn., v. Lacaille	$1^0,3572$	$37^0,0093$	$25666^R,65$
3. „ in Pennsylvanien, v. Mason u. Dixon	$1^0,6435$	$43^0,5556$	$25599^R,60$
4. „ „ Italien, v. Boscowich	$2^0,4034$	$47^0,7963$	$25640^R,55$
5. „ „ Frankreich, v. Delambre etc.	$10^0,7487$	$51^0,3327$	$25658^R,29$
6. „ „ Oesterreich, v. Liesganig	$3^0,2734$	$53^0,0926$	$25683^R,30$
7. „ „ Lappland, v. Clairaut etc.	$1^0,0644$	$73^0,7037$	$25832^R,25$

Die Breiten sind nach hunderttheiligen Graden angegeben, wie damals üblich; will man also Laplace's Angaben über die Grösse eines Meridiangrades nach der jetzt gebräuchlichen Eintheilung umändern, so muss man die R mit 2 multiplicieren, und sodann durch 0,9 dividieren. Nimmt man sodann als allgemeinen Ausdruck für die Grösse eines beliebigen Meridiangrades die Form $M = z + p \sin^2 \varphi$ oder nach unserer bisherigen Schreibweise $M = p + q \sin^2 \varphi$, so erhält man sofort die Gleichungen

$$25538^R,85 = p$$
$$25666\;,65 = p + 0,30156\,q, \text{ wo } 0,30156 = \sin^2 37^0,0093$$
$$25599\;,50 = p + 0,39946\,q, \text{ wo } 0,39946 = \sin^2 43^0,5556$$
$$25640\;,55 = p + 0,46541\,q \qquad \text{u. s. f.}$$
$$25658\;,28 = p + 0,52093\,q$$
$$25683\;,30 = p + 0,54850\,q$$
$$25832\;,25 = p + 0,83887\,q$$

und hat nun zum Zweck der Bildung der Normalgleichungen, welche im Allgemeinen durch

$$[M] = p + [\sin^2\varphi]\, q$$

und

$$[M \sin^2\varphi] = [\sin^2\varphi]\, p + [\sin^4\varphi]\, q$$

dargestellt werden, die Grössen $[M]$, $[p]$, $[\sin^2\varphi]$, $[M \sin^2\varphi]$, $[\sin^4\varphi]$ zu bilden. Man erhält

$$[M] = 179619{,}38,\ [\sin^2\varphi] = 3{,}07473,$$

ferner durch logarithmische Berechnung

$$[M \sin^2\varphi] = 7740{,}03 + 10225{,}98 + 11933{,}37 + 13366{,}17 + 14087{,}29 + 21669{,}90 = 79022{,}74,$$ endlich

$$[\sin^4\varphi] = 0{,}09094 + 0{,}15957 + 0{,}21661 + 0{,}27137 + 0{,}30085 + 0{,}70370 = 1{,}74304$$

und bekommt so die beiden Gleichungen

$$179619{,}38 = 7p + 3{,}07473\, q$$
$$79022{,}74 = 3{,}07473\, p + 1{,}74304\, q,$$

aus welchen sich alsbald ergeben

$p = 25519^R{,}499 = 56709^t{,}998$ des 90theiligen Grades
$q = 319^R{,}665 = 710^t{,}367$ „ „ „ „

Diesen Werthen zufolge wäre die Grösse des Meridiangrades

z. B. auf 0° Breite $= 25519^R{,}499$
„ 30° (33° 20′ *dec*) $= 25599^R{,}415$ $(= p + {}^1/_4\, q)$
„ 45° (50° *dec*) $= 25679^R{,}331$ $(= p + {}^1/_2\, q)$
„ 60° (66° 40′ *dec*) $= 25759^R{,}247$ $(= p + {}^3/_4\, q)$

Berechnet man nun nach der Formel von Schmidt*) den Abplattungs-Coefficienten $= \dfrac{G - g}{3g \sin(\varphi - \psi) \sin(\varphi + \psi)}$, wo G und g die Grössen der Meridiangrade auf den bezüglichen Breiten φ und ψ bedeuten, so erhält man für $\psi = 0$, $\varphi = 60$ (66°40′ *dec*) als Grösse der Abplattung $\dfrac{1}{239}$.

Vergleicht man endlich die erhaltene Formel mit den wirklichen Messungen, so erhält man als übrigbleibende Fehler

aus der Messung	in Peru . . .	$-\ 19^R{,}351$
„ „ „	am Cap . . .	$-\ 50{,}653$
„ „ „	in Pennsylvanien	$+\ 47{,}692$
„ „ „	„ Italien . . .	$+\ 27{,}724$
„ „ „	„ Frankreich .	$+\ 27{,}744$
„ „ „	„ Oesterreich .	$+\ 57{,}443$
„ „ „	„ Lappland . .	$-\ 44{,}599.$

*) Lehrbuch der math. Geogr. Bd. I, S. 178.

Aus den Rechnungen von Laplace, welche $p = 25538{,}85$ beibehalten, ergiebt sich $q = 308^R{,}202$ und die Abplattung zu $\frac{1}{277}$ nach seiner Formel; dabei erhält er einen kleinsten Fehler von $48^R{,}6$, „auf welche Art man auch die vorhergehenden sieben Gradmessungen verbindet; und da dieser Fehler nur die Grenze derjenigen ist, welche zugelassen werden können, und deswegen selbst unendlich wenig wahrscheinlich ist, so müsste man, wenn man eine elliptische Figur annimmt, noch grössere Fehler als $48^R{,}60$ zulassen. Untersucht man aber mit Aufmerksamkeit die Messungen dieser Grade, so scheint es schwer anzunehmen, dass in jedem der drei in Pennsylvanien, am Vorgebirge der guten Hoffnung und in Lappland gemessenen Grade, auf welche die drei grössten Fehler fallen (nach L.), ein Irrthum von $48^R{,}60$ vorgefallen sei. Es scheint also aus den vorhergehenden Messungen zu folgen, dass die Aenderung der Erdmeridiangrade sich merklich vom Gesetz des Quadrats der Sinus der Breiten, welches die Hypothese elliptischer Meridiane giebt, entfernt".

Die oben ermittelten Fehler lassen ebenfalls keinen Zweifel darüber zu, dass solche Irrthümer selbst bei jenen Messungen nicht vorgekommen sein werden. Dass die peruanische, französische und italienische Messung sich schon am engsten der Formel anschliessen, sei nur im Vorübergehen bemerkt.

Die Formel verändert sich nun bedeutend, wenn die einzelnen Differentialgleichungen mit ihren Gewichten, welche durch die in ihnen niedergelegten Gradmengen dargestellt werden, auftreten. Es erhält alsdann

die Gleichung	$25538{,}85 = p$	das Gewicht	3,4633
„ „	$25666{,}65 = p + 0{,}30156\,q$	„ „	1,3572
„ „	$25599{,}50 = p + 0{,}39946\,q$	„ „	1,6435
„ „	$25640{,}55 = p + 0{,}46541\,q$	„ „	2,4034
„ „	$25658{,}28 = p + 0{,}52093\,q$	„ „	10,7487
„ „	$25683{,}30 = p + 0{,}54850\,q$	„ „	3,2734
„ „	$25832{,}25 = p + 0{,}83887\,q$	„ „	1,0644

und die Forderung ist nun, die wahrscheinlichste Ellipse zu suchen, welche sich den genannten Gleichungen am besten anschliesst. Bezeichnen wir die gemessenen Grössen der den verschiedenen Breiten entsprechenden Grade wieder durch M_1, M_2 u. s. f., ferner durch g_1, g_2, u. s. f. die Gewichte dieser Messungen, so sind jetzt die Summen der Producte Mg, also $[Mg]$, $[p \cdot g]$,

$[g.\sin^2\varphi]$, ferner $[g.M\sin^2\varphi]$ und $[g.\sin^4\varphi]$ zu bilden, welche die neuen Normalgleichungen ergeben:

$$[gM] = [g]p + [g.\sin^2\varphi]q$$
$$[g.M.\sin^2\varphi] = [g.\sin^2\varphi]p + [g.\sin^4\varphi]q.$$

Da aus der vorigen Rechnung die Logarithmen der einzelnen Glieder der Summen $[M]$, $[\sin^2\varphi]$, $[M\sin^2\varphi]$, $[\sin^4\varphi]$ bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so bedarf es bloss noch der Addition der $\log g_1$, $\log g_2$ u. s. f. an den betreffenden Stellen, um zu den gewünschten Producten zu gelangen. Bei der geringen Anzahl von Gleichungen, wie im vorliegenden Fall, dürfte die Rechnung am bequemsten auf nachstehende Art ausgeführt werden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
$\log g$	0,53949	0,13264	0,21577	0,38083	1,03136	0,51500	0,02710	
$\log M$	4,40720	4,40937	4,40823	4,40893	4,40923	4,40965	4,41216	
$\log \sin^2\varphi$	—	9,47937	9,60147	9,66784	9,71678	9,73918	9,92369	
$\log M\sin^2\varphi$	—	3,88874	4,00970	4,07676	4,12601	4,14883	4,33586	
$\log \sin^4\varphi$	—	8,95875	9,20295	9,33567	9,43356	9,47835	9,84739	
$\log gM$	4,94669	4,54201	4,62400	4,78976	5,44059	4,92465	4,43926	
gM	88448,0	34834,6	42073,0	61625,7	275800,0	84071,7	27495,6	$614348,6 = [g.M]$
$\log g\sin^2\varphi$	—	9,61201	9,81724	0,04867	0,74814	0,25418	9,95079	
$g\sin^2\varphi$	—	0,4093	0,6565	1,1186	5,5994	1,7955	0,8928	$10,4721 = [g.\sin^2\varphi]$
$\log gM\sin^2\varphi$	—	4,02138	4,22547	4,45759	5,15737	4,66383	4,36296	
$gM\sin^2\varphi$	—	10504,5	16806,2	28680,7	143671,0	46113,0	23065,2	$268840,6 = [gM\sin^2\varphi]$
$\log g\sin^4\varphi$	—	9,09139	9,41872	9,71650	0,46492	9,99335	9,87449	
$g\sin^4\varphi$	—	0,1234	0,2623	0,5206	2,9169	0,9848	0,7490	$5,5570 = [g\sin^4\varphi]$

Man erhält also die Normalgleichungen

$$614348,6 = 23,9539\,p + 10,4721\,q$$
$$268840,6 = 10,4721\,p + 5,5570\,q$$

und aus ihnen

$$p = 25523^R,8 = 56719^t,55 \text{ des 90 theil. Grades,}$$
$$q = 291^R,641 = 648^t,09 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

ferner aus $\psi = 0$, $\varphi = 60^0$ einen verbesserten Werth für die Abplattung $= \frac{1}{263}$.

Laplace findet wieder zu $p = 25538^R,85$, welchen Werth er unverändert beibehält, $q = 246^R,93$, und die Abplattung der Erde zu $\frac{1}{312}$. Dann fährt er wörtlich fort: „Dieser Ausdruck giebt $86^R,26$ für den Irrthum des lappländischen Grades, ein Irrthum, welcher viel zu gross ist, um zugelassen werden zu können. Dies bestätigt, was wir schon oben bemerkt haben, dass die Erde sich merklich von einer elliptischen Figur entfernt".

Damit lässt Laplace nun die Idee einer Combination von mehreren Gradmessungen fallen und wendet sich jetzt allein zur Untersuchung der zweiten französischen Gradmessung von Méchain und Delambre, wohin wir ihm um so weniger folgen, als wir gerade diese Messung demnächst in der eigenen Berechnung des Meridiangrades wieder aufführen werden.

Die wirklich übrigbleibenden Fehler sind in der That noch gross genug, um Misstrauen entweder in die Hypothese oder in die Messungen zu rechtfertigen; sie betragen

bei der Messung von Peru . . .	$-15^R,0$	$=$	$-33',33$
„ „ „ am Cap d. g. H. .	$-55,$	$=$	$-122',22$
„ „ „ in Pennsylvanien .	$+40,8$	$=$	$+90',67$
„ „ „ „ Italien . . .	$+18,6$	$=$	$+43',55$
„ „ „ „ Frankreich . .	$+17,4$	$=$	$+38',67$
„ „ „ „ Oesterreich . .	$+0,4$	$=$	$+0',89$
„ „ „ „ Lappland . .	$-63,9$	$=$	$-142'.$

Die Messungen in Peru, Frankreich und Italien zeichnen sich wieder durch die kleineren Fehler aus, während die lappländische Messung allerdings mit einem grösser gewordenen Fehler auftritt. Dass die vielleicht am meisten angefochtene österreichische Messung hier mit dem kleinsten Fehler behaftet erscheint, muss aus der Unzuverlässigkeit der Mehrzahl der Messungen oder als Zufall erklärt werden.

Das Vorstehende wird genügen, um den Standpunkt zu bezeichnen, welchen die Wissenschaft in jener Zeit den allerdings widerstreitenden Messungen gegenüber einnahm. Den deutschen Mathematikern gebührt das Verdienst, durch strengere Methoden, grossartigere Auffassung und schärfere Analyse der Beobachtungen das Chaos der Meinungen und Ansichten aufgeklärt zu haben. Nach Berichten über ihre Arbeiten sucht man freilich in französischen Werken häufig vergebens; ohne Bessel's Namen zu nennen, überträgt Arago Bd. XIII, S. 258 die Bessel'schen Werthe der halben grossen und kleinen Erdaxe ausnahmsweise in

Meter, führt kurz dessen Abplattungswerth an und übergeht dessen ganze, für die französischen Rechnungen allerdings nicht schmeichelhafte Arbeit mit Stillschweigen, während von den geringfügigsten französischen Arbeiten bündigste Notiz genommen wird. So wird anderen Nationen ihr Recht geschmälert, während man für sich jede Kleinigkeit reclamiert.

34. Es sind unter unseren Landsleuten hauptsächlich die Namen Gauss, Schmidt, Bessel, welche hier vor Allen genannt werden müssen. Ihre Ansichten, welche im Folgenden so kurz und einfach als möglich zusammengefasst sind, waren nach allen Richtungen hin maassgebend; jedenfalls ist die Frage auch von ihnen tiefer behandelt, als von jedem anderen Zeitgenossen.

Zunächst wird zugegeben, dass die Erdoberfläche nicht genau mit der eines Rotations-Ellipsoids übereinstimmt, die Meridiane nicht mathematische Ellipsen sind. Dies folgt aus dem unregelmässigen Wachsen der Meridiangrade nach den Polen, und ferner noch aus verschiedenen, wenn auch nicht durchweg so zuverlässigen Messungen von Parallelkreisbögen (zwischen Brest und Strassburg, Bordeaux und Fiume), welche ebenfalls darthun, dass die Erdoberfläche reich an irregulären Senkungen und Hebungen ist. Jede neue Messung wird also neue Werthe der Meridiangrade und der Abplattung bringen, die Zahl der vorhandenen um eine andere vermehren, ohne die Mannigfaltigkeit der Wirklichkeit zu erschöpfen.

Die Untersuchung der Gestalt der Erdoberfläche und die Ermittelung der besonders interessanten Dimensionen des Erdkörpers muss deshalb so geführt werden, dass man aus den zuverlässigen der vorliegenden Messungen ein ideales elliptisches Sphäroid berechnet, welches sich in möglichst genauer Uebereinstimmung mit diesen wirklich ausgeführten Messungen befindet. Seine Form könnte man sich etwa dadurch versinnlichen, dass man sich den Continent von lauter Kanälen durchzogen dächte, welche mit dem Meere in Verbindung ständen und nun die Oberfläche dieser in's Gleichgewicht gekommenen Wassermasse bestimmte. Die Ausgleichung der Beobachtungen muss nach den Gesetzen der Methode der kleinsten Quadrate, d. h. so geschehen, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Kleinstes werde.

Diese Fehler aber, welche zwischen beobachteten und nach unserer Methode berechneten Grössen der Meridiangrade sich ergeben, sind nach der neueren Ansicht weniger, als bisher angenommen, auf Rechnung des geodätischen Theils der Messung zu setzen, sondern rühren höchst wahrscheinlich vorwiegend von den astronomischen Bestimmungen der Breiten und der Breitenunterschiede oder Amplituden her. Mit vollem Recht nahm man Anstoss an Fehlern von 50 und mehr Toisen, welche bei den Messungen den bisherigen Rechnungen zufolge gemacht zu sein schienen; die Sorgfalt, mit welcher die Messung der ersten Basis und einer zweiten Controle-Basis ausgeführt werden, und das vollendete System der Winkelmessung lassen solche grosse Fehler verdächtig und unwahrscheinlich erscheinen. Um aber nur erst eine Idee von der Wirkung dieser Verlegung der Fehlerquelle zu bekommen, bedenke man nur, wie die Amplitude eines Bogens, dividiert in die auf der Erdoberfläche gemessenen Toisen, die Grösse des Meridiangrades ergiebt, und nun ein Fehler in der Amplitude die Resultate in höchst wirksamer Weise verändert. Es sei z. B. ein Bogen von 1 Grad = 57000 Toisen gemessen, so sind 3600 Sekunden = 57000 Toisen, also 1 Sekunde repräsentiert eine Strecke von beinahe 16 Toisen; mit anderen Worten, ein Fehler von 1 Sekunde in der Amplitude würde die Grösse des Grades um 16 Toisen verändern, Fehler von 50 Toisen, wie oben erhalten, einem Amplitudenfehler von 3 Sekunden entsprechen. Es bleibt natürlich die Frage zu erörtern, ob solche Fehler von einigen Sekunden Statt finden können.

35. Ob man Breiten oder Breitenunterschiede auf astronomischem Wege sucht, in jedem Fall sind dazu Messungen von Zenithdistanzen erforderlich; vom gleichen Stern im Meridian verschiedener Oerter genommen, geben sie den Breitenunterschied der Oerter; oder aber sie geben, verbunden mit der Declination des Sterns, bekanntlich die Breite des Beobachtungsortes selber. Diese Zenithdistanzen werden nur richtig ausfallen können, wenn man das richtige Zenith des Beobachtungsortes bestimmen kann. Die Richtung nach dem Zenith denkt man sich als die Richtung der Schwere, also des Bleiloths, des Pendels, um 90 Grade abstehend von der Oberfläche des künstlichen Horizonts. Man mag nun Zenithdistanzen messen mit Hülfe des am Theodolithen angebrachten Bleiloths oder eines Niveaus oder mit Hülfe eines künstlichen Horizonts: abgesehen von allen übrigen Fehlerquellen werden die Messungen um soviel fehlerhaft ausfallen, als die Rich-

tung des Loths von der wirklichen Verticallinie abweicht. Dass aber in der That die Richtung des Loths nicht immer genau mit der eigentlichen Normale auf die Oberfläche des Erdellipsoids zusammenfalle, darüber liegen Beobachtungen vor von Bouguer in der Nähe der Cordilleren, welcher dort Abweichungen des Loths bis zum Betrage von 7 bis 8 Sekunden fand, ferner von Maskelyne am Shehallien in Schottland, der gar 12 Sekunden örtliche Ablenkung des Pendels gemessen hat (vergl. Müller, kosm. Phys. S. 190). Dies sind frappante Fälle, in der Nähe grosser Gebirgsabhänge; aber Schmidt ist auch der Ansicht, „dass uns nichts zu der Annahme berechtigt, dass in ebenen Gegenden das Pendel gar keiner Abweichung von der Verticallinie unterworfen sei; im Gegentheil könne in vielen Gegenden diese Ablenkung bedeutender ausfallen, als in sehr bergigten Gegenden, und wir dürften wohl annehmen, dass an allen Orten der Erde eine Abweichung stattfindet, veranlasst durch Verschiedenheiten in der Constitution der festen Erdrinde, so dass es gar nicht zu verwundern sei, wenn jede Combination von zwei Gradmessungen eine andere Abplattung gebe, gesetzt auch, dieselben seien frei von allen sonstigen Beobachtungsfehlern. Würde z. B. das Pendel am südlichen Endpunkt eines Meridianbogens nach Norden, am nördlichen Endpunkt nach Süden abgelenkt, so würde der aus dem Unterschiede der Polhöhen sich ergebende Winkel grösser sein, als die eigentliche Amplitude des Bogens, und umgekehrt“. (Vergl. Schmidt, math. Geogr. Bd. I, S. 182.)

Wie schon vorhin bemerkt, gewinnen durch diese Verlegung der Fehlerquelle aus dem geodätischen Theil in den astronomischen die Messungen selber an Wahrscheinlichkeit, insofern als jetzt statt der grossen Zahlen nur noch kleine Winkelunterschiede von einigen Sekunden als übrigbleibende Fehler erscheinen, welche als Fehler schon bei Horizontalwinkeln vorkommen und bei Verticalwinkeln geradezu unvermeidlich erscheinen. Man kann diese Fehler nun ansehen entweder als Amplitudenfehler, indem durch gleichzeitig beobachtete Zenithdistanzen desselben Sterns die Amplitude des zwischen den Beobachtungsstationen liegenden Bogens mit einem Male ermittelt wird, oder als Fehler in den Polhöhen, indem man davon ausgeht, dass erst durch Subtraction der am nördlichen und südlichen Ende eines Meridianbogens aus den Observationen abgeleiteten Polhöhen der Stationen die Amplitude des zwischenliegenden Bogens ermittelt wird.

36. Von der ersten Ansicht ausgehend, hat schon Walbeck in einer in Abo 1819 erschienenen „Dissertatio de forma et magnitudine telluris ex dimensis arcubus meridiani definiendis" die Abplattung und die Grösse eines Meridiangrades so zu bestimmen gesucht, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Amplituden ein Minimum sei. So fand er die Grösse eines Meridiangrades = 57009,758 Toisen und die Abplattung $= \frac{1}{302,78}$.

Da Walbeck in seine Rechnung aber nur die Endpunkte der ganzen von ihm in die Rechnung aufgenommenen Gradmessungen aufgenommen und sich in der Entwickelung seiner Gleichungen auf die erste Potenz der Abplattung beschränkt hatte, so nahm, durch Gauss speciell aufgefordert, Schmidt die Rechnung wieder auf, benutzte Walbeck's Resultate als genäherte Werthe, berücksichtigte die Zwischenstationen ebenfalls, deren Polhöhen als möglichst genau bestimmt angenommen werden durften, zog das Quadrat der Abplattung in Betracht, vermehrte die der Rechnung unterworfenen Gradmessungen noch um die von Gauss geleitete Hannoversche und machte nun die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Polhöhen zu einem Minimum. Dann ergab sich die Abplattung $= \frac{1}{298,319}$ und der 360ste Theil des Erdmeridians zu 57008,662 Toisen.

Zuletzt hat nun der grosse Königsberger Astronom es unternommen (vergl. astron. Nachrichten, No. 333), „die Axen des Erdsphäroids so zu bestimmen, dass die vorhandenen Gradmessungen dadurch so gut als möglich dargestellt werden. Indem man, fährt er weiter fort, die Abweichungen der Oberfläche von der Oberfläche dieses Sphäroids als gesetzlos betrachtet, vereinigt sich ihr Einfluss auf die Polhöhen mit den Beobachtungsfehlern derselben, und man muss, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, dasjenige Sphäroid als das gesuchte betrachten, welches die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit Polhöhen in Uebereinstimmung bringt, deren Unterschiede von den beobachteten den Bedingungen dieser Methode entsprechen". Es wurde aber Bessel dadurch hauptsächlich zu seiner Arbeit veranlasst, weil seit der Rechnung von Schmidt noch drei neue Gradmessungen ausgeführt waren (die russische, die dänische und die preussische), und weil Schmidt mehrere Angaben angewandt hatte, welche Bessel unrichtig zu sein schienen. Bessel's Resultate finden sich in der mehrgenannten Nummer der astronomischen Nachrichten mit der ganzen ausführlich mitgetheilten Rechnung; später hat er letztere noch einer Revision unterwerfen müssen, weil Mathieu Largeteau, Daussy und Puissant einen Fehler in der Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola, dessen Grösse sie zwischen 66',62 und 69',89 angaben, gefunden hatten, und deshalb einige auf die französische Gradmessung bezügliche Gleichungen modificiert werden mussten. Jetzt fand Bessel die Grösse des mittleren Meridiangrades = 57013',109 mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 2',8403 und die Abplattung $= \frac{1}{299}$; die Fehler in den Polhöhen schwanken zwischen den Grenzen 0'',065 an einer ostindischen Station und 6'',447 an einer französischen Station; der mittlere Fehler beträgt $\pm$ 2'',640. Vergl. hierüber sowie über die übrigen Dimensionen des Erdkörpers astr. Nachr. No. 438.

Ein Hauptverdienst der gründlichen Arbeit Bessels besteht in der strengen Untersuchung und Prüfung der einzelnen Data und Angaben in den Gradmessungen, welche er seinen Rechnungen schliesslich zu Grunde legte, und wodurch er zu manchen Aenderungen sowohl der geodätischen als besonders auch der astronomischen Bestimmungen geführt wurde; und dass aus diesem Grunde und wegen der strengen Methode, nach welcher die letzte Ausgleichungs-Rechnung geführt wurde, seine Resultate so lange die endgültig richtigen sein werden, bis neue Gradmessungen wieder neue Momente zur Beurtheilung der wirklichen Gestalt des Erdsphäroids liefern, bedarf kaum der Erwähnung.

Beiläufig sei hier erwähnt, dass Mädler in der fünften — neuesten — Ausgabe seiner populären Astronomie (Berlin 1861) folgende neue Gradmessungen aufzählt);

1) die südliche Fortsetzung der russischen Messung bis Ismail;
2) die nördliche Fortsetzung durch Finnland und Norwegen bis Fuglenäs (russisch-norwegische Messung);
   Eine Uebersichtskarte der bis 1858 ausgef. trig. u. astron. Arbeiten findet sich in Petermann's geograph. Mittheil. Jahrg. 1858. pag. 250.

3) die Messung von Everest in Nordindien als Fortsetzung der Lambton'schen.

Mädler pag. 23. Noch Weiteres vergl. in Baeyer's Denkschrift über Gradmessungen 1861.

37. Eine nicht uninteressante Nebenfrage scheint darüber noch nicht weiter untersucht zu sein, nämlich die Ermittelung der Grössen der Meridiangrade und der Abplattung auf Grund der älteren Hypothese, welche, wie oben gezeigt, schon von Laplace verfolgt, aber bald aufgegeben ist, und zwar mit Zugrundelegung der Bessel'schen Data. Es ist freilich vorhin der Zusammenhang zwischen dem Fehler von 1″ in der Amplitude und etwa 16 Toisen Messungsfehler auf der Erdoberfläche kurz angedeutet, aber theils geht diese Rechnung von einer bestimmten Voraussetzung aus, welche nur auf einer gewissen Breite gültig ist, theils dürfte es an sich interessant sein zu sehen, wie sich überall die Fehler, welche nach der ältern Methode resultieren, zu den Fehlern, welche Bessel fand, verhalten. Da die bezügliche Rechnung, welche im Folgenden dargelegt werden soll, zugleich ganz elementar gehalten ist, so mag sie dem Anfänger zugleich als nützliche Uebung in langwierigern numerischen Rechnungen dienen.

Zunächst scheint es an der Zeit zu sein, die Bessel'schen Data aufzuführen, welche ihm zufolge die einzelnen Gradmessungen ergaben; vergl. astron. Nachr. No. 333 u. 438.

Name der Messung.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
1. Die peruanische Messung. Mittelwerthe der Reductionen von Delambre u. v. Zach	Tarqui Cotchesqui	— 3° 4′ 32″,068 + 0 2 31 ,387	3° 7′ 3″,455	176875T,5
2. Die erste ostindische Messung mit Berücksichtigung von Kater's Prüfung der Lambton'schen Rechnung.	Trivandeporum Paudree	11°44′ 52″,590 13 19 49 ,018	1°34′56″,428	89813T,01

Name der Messung.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
3. Die zweite ostindische Messung, nachdem	Punnae	8° 9′ 31″,132		
Bessel „für nöthig gehalten,	Putchapolliam	10 59 42 ,276	2° 50′ 11″,144	160 944^{T},20
die mit dem Zenithsector	Dodagoontáh	12 59 52 ,165	4 50 21 ,033	274 694 ,30
zur Bestimmung der Polhö-	Namthabad	15 5 53 ,562	6 56 22 ,430	393 828 ,09
hen gemachten Beobach-	Daumeragidda	18 3 16 ,245	9 53 45 ,113	561 690 ,06
tungen einer neuen Rech-	Takal K'hora	21 5 51 ,532	12 56 20 ,400	734 570 ,43
nung zu unterwerfen“.	Kullianpoor	24 7 11 ,860	15 57 40 ,728	906 171 ,67
4. Die französische				
Messung nach den Verbes-	Formentera	38° 39′ 56″,11		
serungen und Auslassun-	Montjouy	41 21 44 ,96	2° 41′ 48″,85	153 673^{T},61
gen von Delambre und	Barcelona	41 22 47 ,90	2 42 51 ,79	154 616 ,74
den eigenen Correctionen	Carcassonne	43 12 54 ,30	4 32 58 ,19	259 172 ,61
wegen des oben genannten	Evaux	46 10 42 ,54	7 30 46 ,43	428 019 ,31
Fehlers in dem Abstande	Panthéon	48 50 49 ,37	10 10 53 ,26	580 312 ,41
der Parallelen von Mont-	Dünkirchen	51 2 8 ,85	12 22 12 ,74	705 257 ,21
jouy und Mola.				
5. Die englische				
Messung, indem die von	Dunnose	50° 37′ 7″,633		
Mudge gemachten Re-	Greenwich	51 28 39 ,000	0° 51′ 31″,367	49 059^{T},89
ductionen seiner Beobach-	Blenheim	51 50 27 ,632	1 13 19 ,999	69 829 ,19
tungen durch B. neu com-	Arburyhill	52 13 28 ,031	1 36 20 ,398	91 696 ,39
biniert wurden.	Clifton	53 27 31 ,130	2 50 23 ,497	162 075 ,93
6. Die hannoversche				
Messung. Aus Gauss'	Göttingen	51° 31′ 47″,85		
„Breitenunterschied etc.“	Altona	53 32 45 ,27	2° 0′ 57″,42	115 163^{T},725
S. 71 entnommen.				
7. Die dänische Mes-				
sung. Nach Mittheilungen	Lauenburg	53° 22′ 17″,046		
von Schumacher.	Lyssabel	54 54 10 ,352	1° 31′ 53″,306	87 436^{T},538
8. Die preussische				
Messung. Von B. selbst	Trunz	54° 13′ 11″,466		
ausgeführt und beschrie-	Königsberg	54 42 50 ,500	0° 29′ 39″,034	28 211^{T},629
ben.	Memel	55 43 40 ,446	1 30 28 ,980	86 176 ,975

Name der Messung.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
9. Die russische Messung nach den Mittheilungen von General von Tenner und Struve.	Belin	52° 2′ 40″,864		
	Nemesch	54 39 4 ,519	2° 36′ 23″,655	148 811^T,418
	Jacobstadt	56 30 4 ,562	4 27 23 ,698	254 543 ,454
	Bristen	56 34 51 ,550	4 32 10 ,686	259 110 ,085
	Dorpat	58 22 47 ,280	6 20 6 ,416	361 824 ,461
	Hochland	60 5 9 ,771	8 2 28 ,907	459 363 ,008
10. Die schwedische Messung. Nach den Angaben von Svanberg.	Malörn	65° 31′ 30″,265		
	Pahtawara	67 8 49 ,830	1° 37′ 19″,565	92 777^T,981

38. Diese Gradmessungen sollen nun nach folgender Theorie verglichen werden.

Innerhalb jeder einzelnen Gradmessung werden die Messungen von einer Station zur andern als selbstständige, für sich bestehende Messungen angesehen. Während also Bessels Werthe der Amplituden von der südlichsten Station ab zur nördlichsten steigen, enthalten die neuen Amplituden nur die Breitenunterschiede je zweier nächst benachbarter Stationen und dazu die betreffenden Entfernungen der Parallelen. Aus dem Breitenunterschiede in Graden und der Entfernung der Parallelen in Toisen ergiebt sich, wie gross der Messung zufolge ein Grad auf der dazwischenliegenden Mittelbreite in Wirklichkeit ist. Man erhält auf diese Weise 28 Werthe der einzelnen Meridiangrade von 1°31′0″,340 Mittelbreite bis herauf zu 66°20′10″,048 der schwedischen Messung. Jeder der Werthe dieser Meridiangrade wird mit der Zahl als Gewicht in Rechnung geführt, welche den Breitenunterschied bezeichnet, aus welcher die Grösse des vollen Grades gefunden ist.

Die verschiedenen Werthe dieser Meridiangrade werden nun sämmtlich dem Ausdruck $p - q \cos 2\varphi$ gleichgesetzt und die Ausgleichung der Methode der kleinsten Quadrate gemäss ausgeführt. Da für $\varphi = 45^0$ der Ausdruck übergeht in den Werth p, so bedeutet p die Grösse des Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= 45^0$ ist, und $q \cos 2\varphi$ den für $\varphi < 45^0$ subtractiven, für $\varphi > 45^0$

additiven Werth in Toisen, um welche sich ein Meridiangrad auf der mittleren Breite von φ Graden von dem Meridiangrade auf 45° mittlerer Breite unterscheidet. Da nach Bessel die Grösse des Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= \varphi$ ist, durch den Ausdruck

$$57013^t,109 - 286^t,337 \cos 2\varphi + 0^t,611 \cos 4\varphi + 0^t,001 \cos 6\varphi$$

gefunden wird, so ist wegen der Bequemlichkeit der Vergleichung und der Möglichkeit der Erweiterung auf das dritte und vierte Glied die Form der Function $p - q \cos 2\varphi$ der früher angewandten $p + q \sin^2\varphi$ vorgezogen, wo p die Grösse des Meridiangrades auf 0° Breite vorstellte.

Um die Rechnung von vornherein nicht mehr als nöthig weitläufig zu machen, bleibe die Function auf die beiden ersten Glieder beschränkt; man hat dann 28 Gleichungen von der Form

$$M = p - q \cos 2\varphi,$$

welche die Gewichte $g_1, g_2, g_3 \ldots g_{28}$ haben, auszugleichen. Sie führen auf die beiden Normalgleichungen

$$[M.g] = p.[g] - q.[g.\cos 2\varphi] \text{ und}$$
$$[M.g.\cos 2\varphi] = p.[g.\cos 2\varphi] - q.[g.\cos^2 2\varphi],$$

aus welchen Gleichungen p und q gefunden werden können.

Die bezügliche Rechnung, welche hier ausführlich mitgetheilt wird, weil es in dieser Schrift nicht vorzugsweise auf die Resultate ankommt, sondern auch und vielmehr gezeigt werden soll, wie man auf schickliche Weise zu ihnen gelangt, lässt sich, wie unten gezeigt, ausführen. Dabei sind verschiedene Controlen, welche sich jeder praktische Rechner im Verlauf der Rechnung nicht entgehen lassen wird, z. B. über die Richtigkeit der neuen Amplituden u. s. w., um die Uebersicht nicht zu erschweren, weggelassen. Ferner sind keine Näherungswerthe, für die Grösse des mittleren Meridiangrades so wenig als für q, eingeführt, weil man damit den Vortheil einbüssen würde, die neuen „Entfernungen der Parallelen“, welche offenbar nichts anderes als die Werthe $g.M$ sind, direct zu benutzen; vergl. Spalte 4 und 7, welche multipliciert wieder Spalte 6 ergeben. Dass die Breitenunterschiede als Gewichte einzuführen waren, ergiebt sich am schlagendsten als nothwendig aus dem Werth für M in Spalte 7 bei Barcelona, da naturgemäss eine Amplitude von 1′ 2″,94 nur dazu dienen kann, die Grösse eines ganzen Grades pro parte festzustellen; von Montjouy aber mit Ueberschlagung von Barcelona auf Carcassonne weiterzugehen, war ebenfalls unzulässig, weil damit die sichere Polhöhe von

1. Name der Gradmessung.	2. Station.	3. Breite.	4. Breiten-Unterschied, g.
1. Peruanische . . .	Tarqui	$-3^0\ 4'\ 32'',068$	
	Cotchesqui	$+0^0\ 2'\ 31'',387$	$3^0\ 7'\ 3'',455$
2. Erste ostindische .	Trivandeporum	$11^0 44'\ 52'',590$	
	Paudree	13 19 49 ,018	$1^0 34'\ 56'',428$
3. Zweite ostindische	Punnae	$8^0\ 9'\ 31'',132$	
	Putchapolliam	10 59 42 ,276	$2^0 50'\ 11'',144$
	Dodagoontáh	12 59 52 ,165	2 0 9 ,889
	Namthabad	15 5 53 ,562	2 6 1 ,397
	Daumeragidda	18 3 16 ,245	2 57 22 ,683
	Takal K'hera	21 5 51 ,532	3 2 35 ,287
	Kallianpoor	24 7 11 ,860	3 1 20 ,328
4. Französische . . .	Formentera	$38^0 39'\ 56'',11$	
	Montjouy	41 21 44 ,96	$2^0 41'\ 48'',85$
	Barcelona	41 22 47 ,90	0 1 2 ,94
	Carcassonne	43 12 54 ,30	1 50 6 ,40
	Evaux	46 10 42 ,54	2 57 48 ,24
	Panthéon	48 50 49 ,37	2 40 6 ,83
	Dünkirchen	51 2 8 ,85	2 11 19 ,48
5. Englische	Dunnose	$50^0 37'\ 7'',633$	
	Greenwich	51 28 39 ,000	$0^0 51'\ 31'',367$
	Blenheim	51 50 27 ,632	0 21 48 ,632
	Arburyhill	52 13 28 ,031	0 23 0 ,399
	Clifton	53 27 31 ,130	1 14 3 ,099
6. Hannoversche . . .	Göttingen	$51^0 31'\ 47'',85$	
	Altona	53 32 45 ,27	$2^0\ 0'\ 57'',42$
7. Dänische	Lauenburg	$53^0 22'\ 17'',046$	
	Lyssabel	54 54 10 ,352	$1^0 31'\ 53'',306$
8. Preussische	Trunz	$54^0 13'\ 11'',466$	
	Königsberg	54 42 50 ,500	$0^0 29'\ 39'',034$
	Memel	55 43 40 ,446	1 0 49 ,946
9. Russische	Belin	$52^0\ 2'\ 40'',864$	
	Nemesch	54 39 4 ,519	$2^0 36'\ 23'',655$
	Jacobstadt	56 30 4 ,562	1 51 0 ,043
	Bristen	56 34 51 ,550	0 4 46 ,988
	Dorpat	58 22 47 ,280	1 47 55 ,730
	Hochland	60 5 9 ,771	1 42 22 ,491
10. Schwedische . . .	Malörn	$65^0 31'\ 30'',265$	
	Pahtawara	67 8 49 ,830	$1^0 37'\ 19'',565$

5. Mittelbreite φ.	6. Entfernung der Parallelen, $g \cdot M$	7. Grösse eines Meridiangrades auf der Mittelbreite φ, M.	8. Breitenunterschied in Decimaltheilen des Grades, g.	9. $log\ g$
1° 31′ 0″,340	176 875^t,5	56 734^t,026	3°,117 626	0,493 824
12° 32′ 20″,804	89 813^t,01	56 759^t,576	1°,582 341	0,199 300
9° 34′ 36″,704	160 944^t,20	56 741^t,842	2°,836 429	0,452 772
11 59 47 ,221	113 750 ,10	56 797 ,042	2 ,002 747	0,301 626
14 2 52 ,864	119 133 ,79	56 719 ,896	2 ,100 388	0,322 300
16 34 34 ,904	167 861 ,97	56 781 ,086	2 ,956 301	0,470 749
19 34 33 ,889	172 880 ,37	56 809 ,952	3 ,043 135	0,483 321
22 36 31 ,696	171 601 ,24	56 778 ,111	3 ,022 313	0,480 339
40° 0′ 50″,535	153 673^t,61	56 981^t,516	2°,696 903	0,430 865
41 22 16 ,430	943 ,13	53 944 ,621	0 ,017 483	0,242 625 — 2
42 17 51 ,100	104 555 ,87	56 975 ,226	1 ,835 111	0,263 662
44 41 48 ,420	168 846 ,70	56 977 ,357	2 ,963 400	0,471 790
47 30 45 ,955	152 293 ,10	57 069 ,309	2 ,668 564	0,426 278
49 56 29 ,110	124 944 ,80	57 085 ,149	2 ,188 744	0,340 195
51° 2′ 53″,317	49 059^t,89	57 131^t,875	0°,858 713	0,933 848 — 1
51 39 33 ,316	20 769 ,30	57 135 ,602	0 ,363 509	0,560 515 — 1
52 1 57 ,832	21 867 ,20	57 028 ,376	0 ,383 444	0,583 702 — 1
52 50 29 ,581	70 379 ,54	57 024 ,693	1 ,234 194	0,091 383
52° 32′ 16″,560	115 163^t,725	57 126^t,280	2°,015 950	0,304 480
54° 8′ 13″,699	87 436^t,538	57 093^t,064	1°,531 474	0,185 107
54° 28′ 0″,983	28 211^t,629	57 088^t,210	0°,494 176	0,693 877 — 1
55 13 15 ,473	57 965 ,346	57 172 ,145	1 ,013 874	0,005 984
53° 20′ 52″,692	148 811^t,418	57 090^t,879	2°,606 571	0,416 070
55 34 34 ,541	105 732 ,036	57 152 ,084	1 ,850 012	0,267 174
56 32 28 ,056	4 566 ,631	57 284 ,169	0 ,079 719	0,901 561 — 2
57 28 49 ,415	102 714 ,376	57 101 ,169	1 ,798 814	0,254 986
59 13 58 ,526	97 538 ,547	57 165 ,533	1 ,706 247	0,232 042
66° 20′ 10″,048	92 777^t,981	57 196^t,166	1°,622 101	0,210 078

$[gM]$ = 2 881 111^t,65 $[g]$ = 50°,590 273

Name der Gradmessung.	Station.	10. $log\ cos\ 2\ \varphi$	11. $log\ cos^2\ 2\ \varphi$	12. $log\ g\ .\ M$
1. Peruanische . .	Tarqui			
	Cotchesqui	9,999 391	9,998 782	5,247 668
2. Erste ostindische	Trivandeporum			
	Paudree	9,956 999	9,913 997	4,953 339
3. Zweite ostindische	Punnae			
	Putchapolliam	9,975 267	9,950 535	5,206 675
	Dodagoontáh	9,960 754	9,921 508	5,055 952
	Namthabad	9,945 547	9,891 094	5,076 035
	Daumeragidda	9,922 837	9,845 675	5,224 952
	Takal K'hera	9,889 566	9,779 132	5,237 746
	Kallianpoor	9,847 829	9,695 659	5,234 522
4. Französische . .	Formentera			
	Montjouy	9,238 462	8,476 923	5,186 599
	Barcelona	9,101 504	8,203 009	2,974 572
	Carcassonne	8,974 024	7,948 048	5,019 348
	Evaux	8,024 651	6,049 303	5,227 493
	Panthéon	8,942 502 *n*	7,885 004	5,182 680
	Dünkirchen	9,234 603 *n*	8,469 207	5,096 718
5. Englische . . .	Dunnose			
	Greenwich	9,321 288 *n*	8,642 577	4,690 727
	Blenheim	9,362 415 *n*	8,724 830	4,317 422
	Arburyhill	9,385 661 *n*	8,771 321	4,339 793
	Clifton	9,431 873 *n*	8,863 745	4,847 446
6. Hannoversche .	Göttingen			
	Altona	9,415 137 *n*	8,830 273	5,061 316
7. Dänische. . . .	Lauenburg			
	Lyssabel	9,496 329 *n*	8,992 658	4,941 693
8. Preussische . .	Trunz			
	Königsberg	9,511 184 *n*	9,022 367	4,450 428
	Memel	9,543 146 *n*	9,086 292	4,763 168
9. Russische . . .	Belin			
	Nemesch	9,458 325 *n*	8,916 649	5,172 636
	Jacobstadt	9,557 329 *n*	9,114 658	5,024 207
	Bristen	9,593 344 *n*	9,186 688	3,659 596
	Dorpat	9,625 310 *n*	9,250 621	5,011 631
	Hochland	9,678 186 *n*	9,356 372	4,989 176
10. Schwedische .	Malörn			
	Pahtawara	9,831 104 *n*	9,662 208	4,967 445

13.	14.	15.	16.	17.	18.
$\log g \cdot \cos 2\varphi$	Zahl.	$\log gM \cos 2\varphi$	Zahl.	$\log g \cos^2 2\varphi$	Zahl.
0,493 215	3,113 258	5,247 059	176 627,65	0,492 606	3,108 895
0,156 299	1,433 173	4,910 338	81 346,32	0,113 297	1,298 067
0,428 039	2,679 411	5,181 942	152 034,52	0,403 307	2,531 085
0,262 380	1,829 701	5,016 706	103 921,62	0,223 134	1,671 607
0,267 847	1,852 878	5,021 582	105 095,00	0,213 394	1,634 533
0,393 586	2,475 061	5,147 789	140 536,71	0,316 424	2,072 160
0,372 887	2,359 866	5,127 312	134 063,90	0,262 453	1,830 010
0,328 168	2,128 964	5,082 351	120 879,17	0,175 998	1,499 677
9,669 327	0,467 010	4,425 061	26 610,97	8,907 788	0,080 870
7,344 129	0,002 209	2,076 076	119,15	6,445 634	0,000 279
9,237 686	0,172 857	3,993 372	9 848,56	8,211 711	0,016 282
8,496 441	0,031 365	3,252 144	1 787,08	6,521 093	0,000 332
9,368 780 *n*	0,233 765 *n*	4,125 182 *n*	13 340,81 *n*	8,311 282	0,020 478
9,574 798 *n*	0,375 663 *n*	4,331 321 *n*	21 444,78 *n*	8,809 402	0,064 477
9,255 136 *n*	0,179 944 *n*	4,012 015 *n*	10,280,52 *n*	8,576 425	0,037 708
8,922 930 *n*	0,083 739 *n*	3,679 837 *n*	4 784,50 *n*	8,285 345	0,019 291
8,969 363 *n*	0,093 188 *n*	3,725 454 *n*	5 314,39 *n*	8,355 023	0,022 648
9,523 256 *n*	0,333 623 *n*	4,279 319 *n*	19 024,75 *n*	8,955 128	0,090 184
9,719 617 *n*	0,524 344 *n*	4,476 453 *n*	29 953,83 *n*	9,134 753	0,136 381
9,681 436 *n*	0,480 215 *n*	4,438 022 *n*	27 417,14 *n*	9,177 765	0,150 579
9,205 061 *n*	0,160 347 *n*	3,961 612 *n*	9 154,02 *n*	8,716 244	0,052 029
9,549 130 *n*	0,354 103 *n*	4,306 314 *n*	20 244,84 *n*	9,092 276	0,123 670
9,874 395 *n*	0,748 849 *n*	4,630 961 *n*	42 752,42 *n*	9,332 719	0,215 139
9,824 503 *n*	0,667 580 *n*	4,581 536 *n*	38 153,61 *n*	9,381 832	0,240 898
8,494 905 *n*	0,031 254 *n*	3,252 940 *n*	1 790,36 *n*	8,088 249	0,012 253
9,880 297 *n*	0,759 096 *n*	4,636 941 *n*	43 345,25 *n*	9,505 607	0,320 337
9,910 228 *n*	0,813 257 *n*	4,667 362 *n*	46 490,29 *n*	9,588 414	9,387 627
0,041 182 *n*	1,099 466 *n*	4,798 549 *n*	62 885,23 *n*	9,872 286	0,745 222

$[g \cos 2\varphi] = 11{,}607\,320$ $[gM \cos 2\varphi] = 656\,493{,}91$ $[g \cos^2 2\varphi] = 18{,}382\,718$

Barcelona eingebüsst wurde. Die Spalte 7, welche die Grösse der einzelnen Meridiangrade, den Messungen zufolge, enthält, ist vorläufig überflüssig und wird erst gebraucht, um die übrigbleibenden Fehler zu ermitteln; sie ist aber an sich interessant, weil sie das Wachsen der Meridiangrade nach dem Pole zu unzweideutig darlegt.

Die erste Normalgleichung ergiebt sich nun aus der Addition folgender ursprünglichen Gleichungen:

$$
\begin{array}{rcrcrl}
\text{Spalte 6.} & & \text{Spalte 8.} & & \text{Spalte 14.} & \\
176\,875{,}5 & = & 3{,}117\,626\,p & - & 3{,}113\,258\,q & \\
89\,813{,}01 & = & 1{,}582\,341\,p & - & 1{,}433\,173\,q & \\
160\,944{,}20 & = & 2{,}836\,429\,p & - & 2{,}679\,411\,q & \\
113\,750{,}10 & = & 2{,}002\,747\,p & - & 1{,}829\,701\,q & \\
119\,133{,}79 & = & 2{,}100\,388\,p & - & 1{,}852\,878\,q & \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

zu

$$\text{I.} \qquad 2881\,111{,}65 = 50{,}590\,273\,p - 11{,}607\,320\,q.$$

Ebenso erhält man die zweite durch Addition der Gleichungen

$$
\begin{array}{rcrcrl}
\text{Spalte 16.} & & \text{Spalte 14.} & & \text{Spalte 18.} & \\
176\,627{,}65 & = & 3{,}113\,258\,p & - & 3{,}108\,895\,q & \\
81\,346{,}32 & = & 1{,}433\,173\,p & - & 1{,}298\,067\,q & \\
152\,034{,}52 & = & 2{,}679\,411\,p & - & 2{,}531\,085\,q & \\
103\,921{,}62 & = & 1{,}829\,701\,p & - & 1{,}671\,607\,q & \\
105\,095{,}00 & = & 1{,}852\,878\,p & - & 1{,}634\,533\,q & \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

Die zweite Normalgleichung wird demzufolge

$$\text{II.} \qquad 656\,493{,}91 = 11{,}607\,320\,p - 18{,}382\,718\,q.$$

Da sich aus ihnen, selbst mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen, p und q nicht scharf berechnen lassen, so setze man zur Vermeidung der grossen Zahlen $p = 57000 + p_1$, $q = 290 + q_1$; man hat alsdann

$$
\begin{array}{rcl}
832{,}21 & = & 50{,}590\,273\,p_1 - 11{,}607\,320\,q_1 \\
207{,}66 & = & 11{,}607\,320\,p_1 - 18{,}382\,718\,q_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Man hat nun, wenn man q_1 eliminiert,

$$
\begin{array}{lllll}
 & \log\ 832{,}21 = 2{,}92024 & \text{und} & \log\ 50{,}590.. & = 1{,}70406 \\
 & \log\ 18{,}382.. = 1{,}26441 & & \log\ 18{,}382.. & = 1{,}26441 \\
\hline
1) & \log\ 15298{,}3 = 4{,}18465 & & \log\ 929{,}98 & = 2{,}96847 \\
\text{ferner} & \log\ 207{,}66 = 2{,}31736 & & & \\
 & \log\ 11{,}6073 = 1{,}06473 & \text{und} & 2.\log 11{,}6073 & = 2{,}12946 = \\
\hline
2) & \log\ 2410{,}4 = 3{,}38209; & & \log\ 134{,}72 & \\
\hline
\text{folglich} & 12887{,}9 \qquad = & & 795{,}26\,p_1 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lrl}
\log & 12887{,}9 & = 4{,}11018 \\
\log & 795{,}26 & = 2{,}90051 \\
\hline
\log & 16{,}206 & = 1{,}20967 = \log p_1. \\
\log & 50{,}590 & = 1{,}70406 \\
\hline
\log & 819{,}80 & = 2{,}91371 \\
 & 832{,}21 & \\
\hline
\log & 12{,}41n & = 1{,}09377n \\
\log & 11{,}607 & = 1{,}06473 \\
\hline
\log & 1{,}069n & = 0{,}02904n = \log q_1.
\end{array}$$

Da also sich ergiebt

$$p_1 = 16{,}206 \text{ und } q_1 = -1{,}069,$$

so hat man

$$p = 57016{,}206 \text{ und } q = -288{,}931.$$

Also ist die Grösse eines Meridiangrades ausgedrückt durch die Formel

$$57016',206 - 288',391 \cos 2\varphi.$$

In Folge dieser Rechnung wäre demnach die Grösse des mittleren Meridiangrades, d. h. des Grades, dessen mittlere Polhöhe $= 45^0$ gesetzt wird, $= 57016',206$, während nach der Formel von Bessel sich ergiebt 57012,498, also $3',708$ weniger.

Setzt man aber $\varphi = 0$, so wird die Uebereinstimmung grösser. Aus der obigen Formel erhält man $57016',206 - 288',931 = 56727',275$, während man nach Bessel erhält $56727',383$, mit einem nicht nennenswerthen Unterschiede von $0',108$.

Da im Allgemeinen 16 Toisen gleich 1 Sekunde Unterschied in den Polhöhen zu setzen sind, so würden obige $3',708$ einer Differenz von 0,232 Sekunden in den Polhöhen gleichkommen, ein Unterschied, der leicht aus der ganz verschiedenartigen Rechnung sich ergeben kann.

39. Man kann indessen dem von Bessel gefundenen Ausdruck für die Grösse des Meridiangrades, besonders auf mittlerer Breite, noch bedeutend näher kommen, selbst so nahe, wie mit obigem Ausdruck dem Werth des Meridiangrades auf der mittlern Breite von 0^0, wenn man die Entwickelung der Formel bis zum dritten Gliede fortführt und, um einen convergenten Ausdruck zu bekommen, die Formel fortschreiten lässt nicht nach den *cos* der vielfachen φ, sondern nach höhern Potenzen von $\cos 2\varphi$. Man nehme also als neue Form der Function

$$M = p + q \cos 2\varphi + r \cdot \cos^2 2\varphi,$$

so werden die neuen Normalgleichungen die Form erhalten

$$[gM] = p[g] + q[g \cos 2\varphi] + r[g \cos^2 2\varphi]$$
$$[gM \cos 2\varphi] = p[g \cos 2\varphi] + q[g \cos^2 2\varphi] + r[g \cos^3 2\varphi]$$
$$[gM \cos^2 2\varphi] = p[g \cos^2 2\varphi] + q[g \cos^3 2\varphi] + r[g \cdot \cos^4 2\varphi],$$

indem gleich die Gewichte beigefügt sind. Eine einfache Ver-

Name der Gradmessung.	$\log \cos^3 2\varphi$	$\log g \cdot \cos^3 2\varphi$	Zahl.
1. Peruanische	9,999 173	0,492 997	3,111 696
2. Erste ostindische .	9,870 996	0,070 296	1,175 699
3. Zweite ostindische	9,925 802	0,378 574	2,390 970
	9,882 262	0,183 888	1,527 174
	9,836 641	0,158 941	1,441 920
	9,768 511	0,239 260	1,734 841
	9,668 698	0,152 020	1,419 121
	9,543 488	0,023 827	1,056 397
4. Französische . . .	7,715 385	8,146 250	0,014 004
	7,304 513	5,547 138	0,000 035
	6,922 073	7,185 735	0,001 533
	4,073 954	4,545 744	0,000 004
	6,827 507 *n*	7,253 783 *n*	0,001 794 *n*
	7,703 810 *n*	8,044 005 *n*	0,011 066 *n*
5. Englische	7,963 865 *n*	7,907 713 *n*	0,008 086 *n*
	8,087 244 *n*	7,647 760 *n*	0,004 444 *n*
	8,156 982 *n*	7,740 684 *n*	0,005 504 *n*
	8,295 618 *n*	8,387 001 *n*	0,024 377 *n*
6. Hannoversche . . .	8,245 410 *n*	8,549 890 *n*	0,035 472 *n*
7. Dänische	8,488 988 *n*	8,674 094 *n*	0,047 217 *n*
8. Preussische	8,533 551 *n*	8,227 428 *n*	0,016 882 *n*
	8,629 438 *n*	8,635 422 *n*	0,043 194 *n*
9. Russische	8,374 974 *n*	8,791 043 *n*	0,086 928 *n*
	8,671 987 *n*	8,939 161 *n*	0,061 808 *n*
	8,780 032 *n*	7,681 593 *n*	0,004 804 *n*
	8,875 931 *n*	9,130 917 *n*	0,135 181 *n*
	9,034 558 *n*	9,266 600 *n*	0,184 756 *n*
10. Schwedische . . .	9,493 312 *n*	9,703 390 *n*	0,505 114 *n*

$[g \cos^3 2\varphi] = 12{,}696\,567$

gleichung mit den früheren Normalgleichungen zeigt, dass nur noch die Summen $[g \cos^3 2\varphi]$, $[g \cos^4 2\varphi]$ und $[gM \cos^2 2\varphi]$ neu zu berechnen sind. Die Vorzeichen sind der Bequemlichkeit halber alle positiv genommen; die Rechnung wird ergeben, ob r positiv oder negativ wird. Im Anschluss an die frühere Rechnung hat man:

$log . cos^4 2\varphi$	$log\, g . cos^4 2\varphi$	Zahl.	$log\, g M cos^2 2\varphi$	Zahl.
9,997 564	0,491 388	3,100 189	5,246 450	176 380,23
9,827 995	0,027 295	1,064 865	4,867 337	73 677,80
9,901 070	0,353 842	2,258 612	5,157 210	143 618,23
9,843 016	0,144 643	1,395 219	4,977 460	94 942,34
9,782 188	0,104 488	1,272 003	4,967 129	92 710,54
9,691 350	0,162 098	1,452 440	5,070 627	117 659,51
9,558 264	0,041 586	1,100 489	5,016 878	103 962,79
9,391 317	9,871 656	0,744 143	4,930 181	85 149,28
6,953 846	7,384 711	0,002 425	3,663 522	4 608,10
6,406 018	4,648 643	0,000 004	1,177 580	15,05
5,896 097	6,159 759	0,000 144	2,967 397	927,67
2,098 605	2,570 396	0,000 000	1,276 795	18,92
5,770 009	6,196 286	0,000 157	3,067 685	1 168,65
6,938 414	7,278 609	0,001 899	3,565 925	3 680,65
7,285 154	7,219 002	0,001 656	3,333 303	2 154,28
7,449 659	7,010 174	0,001 024	3,042 252	1 102,18
7,542 642	7,126 344	0,001 338	3,111 114	1 291,56
7,727 490	7,818 873	0,006 590	3,711 191	5 142,70
7,660 547	7,965 027	0,009 226	3,891 589	7 790,27
7,985 317	8,170 424	0,014 805	3,934 351	8 597,90
8,044 735	7,738 612	0,005 478	3,472 795	2 970,27
8,172 584	8,178 568	0,015 086	3,849 460	7 070,67
7,833 298	8,249 368	0,017 757	4,089 285	12 282,46
8,229 316	8,496 490	0,031 368	4,138 865	13 767,80
8,373 376	7,274 937	0,001 883	2,846 284	701,91
8,501 241	8,756 227	0,057 046	4,262 252	18 291,60
8,712 744	8,944 786	0,088 061	4,345 548	22 158,89
9,324 416	9,534 494	0,342 368	4,629 653	42 623,84

$[g \cos^4 2\varphi] = 12,986\,275$ $\quad [gM \cos^2 2\varphi] = 1\,044\,466,09$

Hieraus erhält man die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
2881\,111{,}65 &= 50{,}590\,273\,p + 11{,}607\,320\,q + 18{,}382\,718\,r\\
656\,493{,}91 &= 11{,}607\,320\,p + 18{,}382\,718\,q + 12{,}696\,567\,r\\
1044\,466{,}09 &= 18{,}382\,718\,p + 12{,}696\,567\,q + 12{,}986\,275\,r,
\end{aligned}$$

welche, wenn man jetzt $p = 57010 + p_1$

$$q = -290 + q_1$$

$r = 10 + r_1$ nach ungefährer Schätzung setzt, übergehen in

$$\begin{aligned}
142{,}48 &= 50{,}590\,273\,p_1 + 11{,}607\,320\,q_1 + 18{,}382\,718\,r_1\\
-35{,}38 &= 11{,}607\,320\,p_1 + 18{,}382\,718\,q_1 + 12{,}696\,567\,r_1\\
19{,}48 &= 18{,}382\,718\,p_1 + 12{,}696\,567\,q_1 + 12{,}986\,275\,r_1.
\end{aligned}$$

In scharfer Rechnung ergiebt sich hieraus

log 142,48	= 2,153 7539,	*log* 50,590 273 =	1,704 0670,	*log* 11,607 320 =	1,064 7320
log 12,696 ..	= 1,103 6863	. . . . =	1,103 6863	. . . . =	1,103 6863
	3,257 4402		2,807 7533		2,168 4183
1)	1809,067	=	642,3227 p_1	+	147,3731 $q_1 + \dots r_1$
log 35,38 *n*	= 1,548 7578 *n*,	*log* 11,607 320 =	1,064 7320,	*log* 18,382 718 =	1,264 4097
log 18,382718	= 1,264 4097	. . . . =	1,264 4097	. . . . =	1,264 4097
	2,813 1675 *n*		2,329 1417		2,528 8194
2)	− 650,3804	=	213,3741 p_1	+	337,9243 $q_1 + \dots r_1$
1)−2) oder 3)	2459,4474	=	428,9486 p_1	−	190,5512 q_1

Ferner

log 142,48	= 2,153 7539	*log* 50,590 273 =	1,704 0670	*log* 11,607 320 =	1,064 7320
log 12,986275	= 1,113 4846	. . . . =	1,113 4846	. . . . =	1,113 4846
	3,267 2385		2,817 5516		2,178 2166
4)	1850,2847	=	656,9793 p_1	+	150,7359 $q_1 + \dots r_1$
log 19,48	= 1,289 5890	*log* 18,382 718 =	1,264 4097	*log* 12,696567 =	1,103 6863
log 18,382 718	= 1,264 4097	. . . . =	1,264 4097	. . . . =	1,264 4097
	2,553 9987		2,528 8194		2,368 0960
5)	358,0953	=	337,9243 p_1	+	233,3974 $q_1 + \dots r_1$
4)−5) oder 6)	1492,1894	=	319,0550 p_1	−	82,6615 q_1.

Aus 3) und 6) findet man sodann

log 2459,447	= 3,390 8375	*log* 428,9486	= 2,632 4052
log 82,6615	= 1,917 3033	. . . .	1,917 3033
	5,308 1408		4,549 7085
7)	203 301,6	=	35457,53 $p_1 - \dots q_1$
log 1492,189	= 3,173 8239	*log* 319,0550	= 2,503 8655
log 190,5512	= 2,280 0118	. . . .	= 2,280 0118
	5,453 8357		4,783 8773
8)	284 338,5	=	60796,33 $p_1 - \dots q_1$
8)−7) oder 9)	81036,9	=	25338,80 p_1

$$\begin{aligned}
\log 81036{,}9 &= 4{,}908\,6829\\
\log 25338{,}8 &= 4{,}403\,7861\\
\hline
\log p_1 &= 0{,}504\,8968\\
p_1 &= 3{,}198\,35,
\end{aligned}$$

Um q aus Gleichung 3) zu finden, hat man

$$\begin{array}{rl} \log 428{,}9486 &= 2{,}632\,4052 \\ \log p_1 &= 0{,}504\,8968 \\ \hline & \ 3{,}137\,3020 \\ \text{Zahl} & \ 1371{,}835 \\ \text{aus Gl. 3)} & \ 2459{,}447 \\ \hline & \ 1087{,}612 = -\ 190{,}5512\, q_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 1087{,}612 &= 3{,}036\,4740 \\ \log 190{,}5512 n &= 2{,}280\,0118 n \\ \hline \log q_1 &= 0{,}756\,4622 n \\ q_1 &= -\ 5{,}707\,71. \end{array}$$

Ferner findet man r aus der ersten Normalgleichung

$$\begin{array}{rlrl} \log 50{,}590\,273 &= 1{,}704\,0670 & \log 11{,}607\,320 &= 1{,}064\,7320 \\ \log p &= 0{,}504\,8968 & \log q &= 0{,}756\,4622 n \\ \hline & \ 2{,}208\,9638 & & \ 1{,}821\,1942 n \\ & \ 161{,}7945 \ \ldots\ldots\ldots & & -\ 66{,}2513 \end{array}$$

$$= 95{,}5432$$

aus der ersten Norm.-Gleich. hat man 142,48

$$46{,}9368 = 18{,}3827\ r_1$$

$$\begin{array}{rl} \log 46{,}9368 &= 1{,}671\,5135 \\ \log 18{,}3827 &= 1{,}264\,4097 \\ \hline \log r_1 &= 0{,}407\,1038 \\ r_1 &= 2{,}553\,31. \end{array}$$

Mithin lautet der Ausdruck für die Grösse eines Meridiangrades, dessen mittlere Breite $= \varphi$ ist,

$$57013',198 - 295',708 \cos 2\varphi + 12',553 \cos^2 2\varphi,$$

während Bessel fand

$$57013',109 - 286',337 \cos 2\varphi + 0{,}611 \cos 4\varphi.$$

Setzt man $\varphi = 45^0$, wodurch die beiden letzten Glieder in den Formeln verschwinden, so hat man fast völlige Uebereinstimmung, da die Differenz von $-$ 0',089 ganz irrelevant ist und sich aus der verschiedenen Art der Rechnung genügend erklärt. Für $\varphi = 0$ erhalte ich 56730,043 mit einem Unterschiede von $-$ 2',660 gegen Bessels Werth, so dass, wie schon bemerkt, mein erster Ausdruck 57016',206 $-$ 288',931 $\cos 2\varphi$ die Grösse des Meridiangrades auf niederer Breite genauer bestimmt, während der letztere Ausdruck sich der Bessel'schen Bestimmung auf höherer Breite genauer anschliesst. In jedem Falle ist der materielle Beweis geliefert, dass auf diesem hier verfolgten Wege eine vollständig genügende, alle frühern Bestimmungen an Präcision weit übertreffende Berechnung des Meridiangrades ausgeführt werden kann.

Anm. Mit fünfstelligen Logarithmen berechnet, geben übrigens obige Normalgleichungen auch ganz befriedigende Werthe für p_1, q_1, r_1, nämlich $p_1 = 3{,}1985$, $q_1 = -5{,}7064$, $r_1 = 2{,}5517$. Es sollte aber selbst der Schatten eines Einwandes fern gehalten werden. Wittstein in seinem kurzen Vorwort zu den von ihm herausgegebenen vierstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Hannover, bei Hahn, 1860), welche zusammen mit dessen fünfstelligen Logarithmen eine sehr brauchbare und empfehlenswerthe Ausgabe von Logarithmentafeln bilden, hat gewiss Recht, wenn er sagt, es sei „eine unzweifelhafte Thatsache, dass man bei logarithmischen Rechnungen meistentheils viel mehr Bruchstellen in Gebrauch nehme, als die Genauigkeit der zu suchenden Resultate erfordere, und dadurch sich die Arbeit ohne Noth beschwerlich und zeitraubend mache; sieben — oder mehr als siebenstellige Logarithmen seien nur in äusserst seltenen Fällen nothwendig; in der Regel reichen fünfstellige Logarithmen vollkommen aus; ja in Fällen, wenn man eine Zahl auf nicht mehr als 4 Ziffern, und einen Winkel nicht genauer als auf Minuten zu kennen verlange, liefern vierstellige Logarithmen ein vollkommen zuverlässiges Resultat“. Da in der obigen Rechnung Additionen von 28 Zahlen vorkommen, wodurch die dritte Ziffer von rechts zweifelhaft wird, so wird sich die Rechnung mit sechsstelligen Logarithmen rechtfertigen, weil sie Zahlen mit 6 ganzen Stellen liefern sollten.

40. Es erübrigt noch, einen Blick auf die jetzt übrigbleibenden Fehler zu werfen, da die Ableitung der übrigen Dimensionen des idealen Erdkörpers nicht weiter hieher gehört; sie finden sich in folgender Zusammenstellung (S. 80 u. 81), mit Auslassung der beiden Fehler, welche den übermässig kleinen Amplituden zwischen Barcelona und Montjouy und Jacobstadt und Bristen entsprechen, da sich aus Amplituden von 1′ bis 4′ nicht füglich auf die Grösse eines vollen Grades schliessen lässt (in der dargelegten Rechnung dienten gerade die Gewichte, um den Schluss auf sein zulässiges Maass zu reducieren).

41. Um nun die Vergleichung abzuschliessen, betrachten wir noch, ohne freilich im Vorigen die Entwickelung des bezüglichen Satzes gegeben zu haben, die Grösse des mittleren Werthes dieser Fehler; (die weitere Fortführung der ganzen Lehre von der Methode der kleinsten Quadrate bleibt absichtlich einer spätern Betrachtung vorbehalten, um dem Anfänger Zeit und Gelegenheit

zu lassen, sich in dem mechanischen Theile der einschlagenden Arbeiten vorab festzusetzen). Man findet denselben, wenn man die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler durch die Menge der ursprünglichen Gleichungen, hier 26, vermindert um die Anzahl der Normalgleichungen, hier 3, dividiert und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht. Man hätte also als mittleren Werth dieser Fehler

$$\sqrt{\frac{36518{,}834\,147}{26-3}} = \pm\, 39'{,}847,$$

während Bessel findet $\sqrt{\frac{181{,}221}{38-12}} = \pm\, 2''{,}640$, welche für die mittlere Breite von 0^0, auf welcher 1 Grad $= 56727'{,}383$, also 1 Sekunde $= 15'{,}758$ ist, einem Werth von $41'{,}601$ entsprechen, während auf 45^0 mittlerer Breite $2''{,}640 = 41'{,}810$ sein würden. Die Uebereinstimmung ist offenbar so gross, dass sie keiner weiteren Beleuchtung bedarf. Den mittleren Fehler eines Meridiangrades, den man mit obigem Fehler nicht verwechseln darf, findet Bessel sodann durch Berücksichtigung der Gewichte der Bestimmungen der Unbekannten zu $\pm\, 2'{,}8403$, welchem Werthe sich unsere Berechnung aufs nächste anschliesst.

Einen dem Bessel'schen Werthe der Abplattung $\frac{1}{299{,}153}$ sehr nahe kommenden Werth giebt die Schmidt'sche Formel, wenn man die erste ostindische und die erste russische Messung mit einander vergleicht. Man hat dort

$$\begin{array}{rlrl}
G = 57\,099{,}188 & \text{und} & \varphi = & 53^0\,20'\,52''{,}692 \\
g = 56\,755{,}669 & & \psi = & 12\ \ 32\ \ 20\ {,}804 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
\varphi - \psi = & 40^0\,48'\,31''{,}888 & \log\sin & 9{,}815\,2705 \\
\varphi + \psi = & 65\ \ 52\ \ 73\ {,}496 & \log\sin & 9{,}960\,3481 \\
g = & 56\,755{,}669 & \log & 4{,}754\,0092 \\
 & \text{Factor } 3 & \log & 0{,}477\,1213 \\
G = & 57\,099{,}188 & \text{colog} & 7{,}464\,0493 \\
\hline
 & \log 295{,}664 & = & 2{,}470\,7984
\end{array}$$

oder die Abplattung $\frac{1}{295{,}664}$; Bessels mittlerer Werth der Abplattung enthält den Fehler $\pm\, 4{,}667$ Einheiten, weshalb der genannte Werth als dem richtigen Werth fast gleichkommend anzusehen ist.

Name der Gradmessung.	Station.	Mittelbreite.	Gemessene Grösse des Grades, *M*.
1. Peruanische	Tarqui		
	Cotchesqui	1° 31′ 0″,340	56 734^t,026
2. Erste ostindische .	Trivandeporum		
	Paudree	12° 32′ 20″,804	56 759^t,576
3. Zweite ostindische	Punnae		
	Putchapolliam	9° 34′ 36″,704	56 741^t,842
	Dodagoontáh	11 59 47 ,221	56 797 ,042
	Namthabad	14 2 52 ,864	56 719 ,896
	Daumeragidda	16 34 34 ,904	56 781 ,086
	Takal K'hera	19 34 33 ,889	56 809 ,952
	Kallianpoor	22 36 31 ,696	56 778 ,111
4. Französische . . .	Formentera		
	Montjouy	40° 0′ 50″,535	56 981^t,516
	Barcelona	41 22 16 ,430	53 944 ,621
	Carcassonne	42 17 51 ,100	56 975 ,226
	Evaux	44 41 48 ,420	56 977 ,357
	Panthéon	47 30 45 ,955	57 069 ,309
	Dünkirchen	49 56 29 ,110	57 085 ,149
5. Englische	Dunnose		
	Greenwich	51° 2′ 53″,317	57 131^t,875
	Blenheim	51 39 33 ,316	57 135 ,602
	Arburyhill	52 1 57 ,832	57 028 ,376
	Clifton	52 50 29 ,581	57 024 ,693
6. Hannoversche . . .	Göttingen		
	Altona	52° 32′ 16″,560	57 126^t,280
7. Dänische	Lauenburg		
	Lyssabel	54° 8′ 13″,699	57 093^t,064
8. Preussische	Trunz		
	Königsberg	54° 28′ 0″,983	57 088^t,210
	Memel	55 13 15 ,473	57 172 ,145
9. Russische	Belin		
	Nemesch	53° 20′ 52″,692	57 090^t,879
	Jacobstadt	55 34 34 ,541	57 152 ,084
	Bristen	56 32 28 ,056	57 284 ,169
	Dorpat	57 28 49 ,415	57 101 ,169
	Hochland	59 13 58 ,526	57 165 ,533
10. Schwedische . . .	Malörn		
	Pahtawara	66° 20′ 10″,048	57 196^t,166

Berechnete Grösse des Grades, F.	$F - M$.	$(F - M)^2$	Bessels Fehler der Polhöhen.
			— 0″,606
56 730^{t},423	— 3^{t},603	12,981 609	+ 0 ,606
			— 0″,271
56 755^{t},669	— 3^{t},907	15,264 649	+ 0 ,271
			— 1″,470
56 745^{t},063	+ 3^{t},221	10,374 841	— 1 ,712
56 753 ,523	— 43 ,519	1893,903 361	+ 4 ,016
56 762 ,104	+ 42 ,208	1781,515 264	— 1 ,447
56 774 ,426	— 6 ,660	44,355 600	— 0 ,065
56 891 ,431	+ 81 ,479	6638,827 441	+ 3 ,537
56 811 ,127	+ 33 ,016	1090,056 256	— 2 ,859
			+ 0″,955
56 962^{t},368	— 19^{t},148	366,645 904	+ 4 ,115
56 976 ,042	—	—	+ 0 ,764
56 985 ,456	+ 10 ,230	104,652 900	— 0 ,433
57 010 ,069	+ 32 ,712	1070,074 944	— 6 ,447
57 039 ,198	— 30 ,111	906,672 321	— 1 ,099
57 064 ,320	— 20 ,829	433,847 241	+ 2 ,144
			— 1″,816
57 075^{t},715	— 56^{t},160	3153,945 600	— 1 ,396
57 081 ,983	— 53 ,619	2874,997 161	+ 2 ,705
57 085 ,805	+ 57 ,429	3298,090 041	+ 1 ,395
57 094 ,048	+ 69 ,355	4810,116 025	— 3 ,679
			— 2″,493
57 090^{t},951	— 35^{t},329	1248,138 241	+ 2 ,493
			+ 0″,451
57 107^{t},157	+ 14^{t},093	198,612 649	— 0 ,451
			— 0″,907
57 110^{t},470	+ 22^{t},260	495,507 600	— 1 ,448
57 118 ,008	— 54 ,137	2930,814 769	+ 2 ,355
			— 1″,732
57 099^{t},188	+ 8^{t},309	69,039 481	— 2 ,384
57 121 ,539	— 30 ,545	932,997 025	+ 1 ,826
57 131 ,059	—	—	+ 2 ,627
57 140 ,221	+ 39 ,052	1525,058 704	— 1 ,044
57 156 ,995	— 8 ,538	72,897 444	+ 0 ,607
			+ 0″,560
57 219^{t},392	+ 23^{t},226	539,447 076	— 0 ,560

$\Sigma\,(F-M)^2 = 36518{,}834\,147$

42. **Bestimmung der Breite eines Orts und der Durchbiegungs-Constante des Fernrohrs eines Universalinstruments vermittelst beobachteter Meridional-Zenithdistanzen von Sternen.**

Es ist schon oben gelegentlich angedeutet worden, dass die für Refraction verbesserte Zenithdistanz eines Sterns bei seinem Durchgange durch den Meridian und die Declination dieses Sterns vermittelst einer einfachen Addition oder Subtraction dieser Werthe die Breite des Beobachtungsorts ergeben. Die (wahre) Zenithdistanz eines Sterns aber erhält man entweder indirect durch Höhenbeobachtung desselben über dem künstlichen Horizont, (oder wie auf See über der Kimm) vermittelst der Sextanten, Reflexionskreise u. s. w. und Anbringung der bekannten Berichtigungen, oder direct durch Ablesung am Vertikalkreise eines Universalinstruments, oder eines Passageninstruments u. s. w. und Verbesserung der abgelesenen Werthe wegen Refraction. — Wir wollen uns in Folgendem denken, dass directe Beobachtungen von Meridional-Zenithdistanzen, oder solcher, die auf den Meridian reduciert sind, an einem Ertel'schen Universalinstrument angestellt sind. Wer eine eingehende Beschreibung des Instruments wünscht, verweisen wir auf Sawitsch praktische Astronomie I. pag. 156.

Es seien ferner alle nothwendigen Berichtigungen des Instruments vor dem Gebrauch vorgenommen, auch seien die Correctionen, welche man vermittelst der Einstellung des Instruments nicht zu beseitigen, sondern lieber in der Rechnung zu berücksichtigen pflegt, als schon bekannt anzusehen, und es handle sich bloss noch darum, diejenige Correction der Beobachtungen zu ermitteln, welche die Schwere wegen der von ihr verursachten Durchbiegung des Fernrohrs nöthig macht. Endlich fehlen Mittel und Gelegenheit, um das von Bessel angegebene Verfahren zur Ermittelung dieser Durchbiegungs-Constante vermittelst zweier vor und hinter dem Instrumente aufgestellter Fernröhre (cf. Sawitsch I. pag. 211) anzuwenden. Es bleibt dann, um zum Zweck zu gelangen, unter anderem noch der Weg übrig, den die Ueberschrift dieser Aufgabe andeutet.

Die Durchbiegung des Fernrohrs wird man sich am einfachsten dadurch bewirkt vorstellen, dass am Ende desselben ein Gewicht befestigt sei, welches bei horizontaler Lage des Fernrohrs eine grösste Durchbiegung verursachen wird, während bei vertikaler Stellung ein Einfluss auf die Ablesung sich nicht geltend machen kann. Das Gewicht ist aber die Schwere der hängenden Theile des Fernrohrs selber, und es ist zunächst klar, dass wenn einmal eine Durchbiegung in einer horizontalen Lage stattgefunden hat, wodurch das Objectiv des Fernrohrs sich nach unten geneigt hat, eine Umlegung des Instruments nach dem entgegengesetzten Theile des Horizonts zur Folge haben wird, dass jetzt das Objectiv nach oben gerichtet ist, dass folglich auch die Fehler der abgelesenen Winkel in den entgegengesetzten Lagen des Instruments verschiedene Vorzeichen haben werden. Es betrage dieser Fehler im Allgemeinen $\pm q$ Sekunden.

Um sodann zu ermitteln, wieviel von diesem grössten Fehler bei einer Zenithdistanz von z Graden in Rechnung zu führen sei, hat man sich die Wirkung der Schwere nach dem Kräftenparallelogramm nach zwei Richtungen zu zerlegen, von denen der eine Theil, längs der optischen Axe des Instruments wirkend, offenbar hier nicht zu berücksichtigen ist, während der andere Theil, senkrecht auf die optische Axe und zwar in einer Stärke $= q . \sin z$ drehend, biegend auf das Fernrohr einwirkt. Es ist also $q . \sin z$ der allgemeine Ausdruck der Correction für die Durchbiegung des Fernrohrs bei einer beliebigen Zenithdistanz z und sowohl positiv als negativ anzunehmen, und $z \pm q . \sin z$ also der wahre Werth einer Zenithdistanz z, wo das $+$ Zeichen der Durchbiegungs-Constante für Zenithdistanzen gelten mag von Sternen, welche in der obern Culmination beobachtet sind.

Man kann sich nun die Breite φ des Ortes entweder als bekannt oder als unbekannt vorstellen. Man wird dann im ersten Fall, wenn die genau bekannte Declination des Sterns $= \pm \delta$ gesetzt wird, bei obern Culminationen für die Breite den Werth erhalten

$$\varphi = \pm \delta + z + q \sin z,$$

während bei unteren Culminationen, also wenn man Gestirne mit Declinationen δ_1 beobachtet, welche gleichnamig mit der Breite sind, man als Werth der Breite erhält

$$\varphi = 180^0 - \delta_1 - z_1 - q . \sin z_1,$$

wo z_1 die Zenithdistanz bei der unteren Culmination bedeutet. Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man leicht den Werth der Durchbiegungs-Constante oder

$$q = \frac{180^0 - (\delta_1 \pm \delta + z_1 + z)}{\sin z_1 + \sin z} .$$

Von diesem Fall absehend, denken wir uns den zweiten Fall, dass ein Beobachter an einem Ort, dessen Breite unbekannt sei, mit einem bis auf die Grösse der Durchbiegungs-Constante berichtigten Instrument Meridional-Zenithdistanzen von einer Reihe von Sternen messe und sich nun die Aufgabe stelle, gleichzeitig die Breite und die Durchbiegungs-Constante des Instruments zu ermitteln. Man wird nun zunächst aus den erhaltenen wahren Zenithdistanzen unter Anbringung der Declination sich einen genäherten Werth φ_1 der Breite verschaffen können, der nur noch mit irgend einer Correction p versehen werden müsste, um die richtige Breite zu geben, und sich jetzt unter $\varphi_1 + p$ die richtige Breite φ vorstellen. Die obigen Gleichungen würden also jetzt die Form annehmen:

$\varphi_1 + p = \pm \delta + z + q \sin z$ bei oberen Culminationen

und

$\varphi_1 + p = 180^0 - \delta_1 - z_1 - q \sin z_1$ bei unteren Culminationen,

welche man besser gleich auf die übliche Form bringt

$$0 = ((\pm \delta + z) - \varphi_1) - p + q \sin z \text{ und}$$

$$0 = ((180^0 - \delta_1 - z_1) - \varphi_1) - p - q \sin z_1.$$

Da hier die Werthe $\pm \delta + z$ und $180 - \delta_1 - z_1$ diejenigen Werthe der Breite bedeuten, welche unmittelbar aus den beobachteten und für Refraction verbesserten Zenithdistanzen und den Declinationen der betreffenden Gestirne hervorgehen, so könnte man sie kurzweg mit Φ bezeichnen und hätte dann als allgemeine Form die Bedingungsgleichung

für obere Culminationen $0 = \Phi - \varphi_1 - p + q \sin z$

für untere Culminationen $0 = \Phi - \varphi_1 - p - q \sin z_1$.

Solcher Gleichungen erhält man alsdann so viele, als Gestirne zur Messung der Zenithdistanzen benutzt sind, und es handelt sich nur noch darum, vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Breiten-Correction p und der Durchbiegungs-Constante q zu berechnen.

43. Als Beispiel wählen wir eine Bestimmung der Breite des „alten Zolls“ bei Bonn, beruhend auf einer Reihe von Beobachtungen, welche Lundahl laut einer Dissertation (dissertatio astronomica de altitudine poli Bonnensis, Helsingfors 1840) dort angestellt hat. Die beobachteten Sterne waren

β Geminorum,	dessen	$\delta = + 28^{\circ}24'23'',5$	$+ 0'',7$
α Tauri,	„	$\delta = + 16^{\circ}10'53'',9$	$+ 0'',5$
α Orionis,	„	$\delta = + 7^{\circ}22'15'',7$	$+ 0'',6$
δ Hydrae,	„	$\delta = + 6^{\circ}15'26'',0$	
β Orionis,	„	$\delta = - 8^{\circ}23'30'',2$	$+ 1'',6$
α Canis majoris,	„	$\delta = - 16^{\circ}30'\ 6'',5$	$+ 1'',1$
δ Ursae minoris,	„	$\delta = + 86^{\circ}35'29'',71$	$+ 0'',43$
δ Draconis	„	$\delta = + 67^{\circ}22'48'',8$	
64 Draconis,	„	$\delta = + 64^{\circ}22'26'',1$	
α Cephei	„	$\delta = + 61^{\circ}54'33'',1$	$+ 1'',2$

Von ihnen sind die letztern vier in der untern Culmination beobachtet. Aus 262 einzelnen Beobachtungen sind nun folgende Werthe der Polhöhen ermittelt, denen wir gleich die Anzahl der einzelnen Beobachtungen, aus denen sie hervorgegangen, nebst den daraus folgenden Gewichten, sowie die mittleren Werthe der Polhöhen und deren Summe der Gewichte beifügen.

Gestirn.	Beobachtete Breiten.	Anzahl der Beobachtungen.	Gewicht derselben.	Mittlere Werthe der Breite oder Φ.	Gewicht derselben.
β Geminorum . . .	$50^{\circ}44'\ 8'',7$	4	1		
	10 ,5	4	1		
	9 ,7	4	1		
	8 ,0	4	1		
	10 ,2	2	$^2/_3$	$50^{\circ}44'\ 8'',14$	$9^1/_3$
	6 ,9	4	1		
	7 ,0	4	1		
	7 ,3	6	$^4/_3$		
	6 ,5	6	$^4/_3$		
α Tauri	$50^{\circ}44'\ 8'',0$	6	$^4/_3$	$50^{\circ}44'\ 8'',0$	$1^1/_3$
α Orionis	$50^{\circ}44'\ 8'',5$	6	$^4/_3$		
	9 ,2	6	$^4/_3$	$50^{\circ}44'\ 8'',42$	$4^1/_3$
	9 ,3	4	1		
	5 ,4	2	$^2/_3$		
δ Hydrae	$50^{\circ}44'\ 8'',0$	4	1		
	8 ,5	4	1		
	8 ,3	4	1		
	11 ,3	4	1	$50^{\circ}44'\ 8'',92$	6
	8 ,6	4	1		
	8 ,8	4	1		

Gestirn.	Beobachtete Breiten.	Anzahl der Beobachtungen.	Gewicht derselben.	Mittlere Werthe der Breite oder Φ.	Gewicht derselben.
β Orionis	50° 44′ 6″,9	4	1		
	6 ,3	4	1	50° 44′ 6″,15	4
	5 ,7	4	1		
	5 ,7	4	1		
α Canis majoris .	50° 44′ 7″,3	8	$^5/_8$		
	8 ,4	6	$^4/_8$		
	8 ,3	4	1	50° 44′ 7″,70	7
	5 ,9	4	1		
	9 ,5	4	1		
	6 ,8	4	1		
δ Ursae minoris .	50° 44′ 10″,2	4	1		
	10 ,4	2	$^2/_8$		
	7 ,6	4	1		
	7 ,2	4	1		
	10 ,9	4	1	50° 44′ 9″,99	$11^2/_8$
	12 ,8	4	1		
	11 ,3	8	$^5/_8$		
	8 ,3	8	$^5/_8$		
	9 ,0	6	$^4/_8$		
	12 ,2	6	$^4/_8$		
δ Draconis . . .	50° 44′ 9″,4	6	$^4/_8$		
	11 ,4	6	$^4/_8$		
	9 ,0	4	1		
	11 ,4	4	1		
	12 ,3	6	$^4/_8$		
	9 ,9	4	1	50° 44′ 11″,01	11
	11 ,8	4	1		
	12 ,2	4	1		
	10 ,6	4	1		
	12 ,1	4	1		
64 Draconis . . .	50° 44′ 8″,4	2	$^2/_8$		
	9 ,4	4	1		
	8 ,6	4	1		
	10 ,7	4	1	50° 44′ 10″,68	$6^2/_8$
	12 ,8	4	1		
	12 ,3	4	1		
	11 ,8	4	1		
α Cephei	50° 44′ 9″,8	4	1		
	11 ,7	4	1	50° 44′ 10″,75	2

Summe sämmtlicher Breiten . . . . 89″,76

Genäherter Werth der Breite 50° 44′ 9″ $= \varphi$;

Man findet nun leicht die Werthe $\Phi - \varphi_1$, ferner die $\sin z$, wobei man für z nur genäherte Werthe in Rechnung zu führen nöthig hat,

bei β Geminorum,	deren	$z = 22^0\,20'$,	$\sin z = 0{,}380$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,0'',86$
„ α Tauri,	„	$z = 34^0\,33'$,	$\sin z = 0{,}567$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,1'',00$
„ α Orionis,	„	$z = 43^0\,22'$,	$\sin z = 0{,}686$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,0'',58$
„ δ Hydrae,	„	$z = 44^0\,29'$,	$\sin z = 0{,}701$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,0'',08$
„ β Orionis,	„	$z = 59^0\;\,7'$,	$\sin z = 0{,}858$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,2'',85$
„ α Canis majoris,	„	$z = 67^0\,14'$,	$\sin z = 0{,}922$,	$\Phi - \varphi_1 = -\,1'',30$
„ δ Ursae minoris,	„	$z_1 = 42^0\,41'$,	$\sin z_1 = 0{,}678$,	$\Phi - \varphi_1 = +\,0'',99$
„ δ Draconis,	„	$z_1 = 61^0\,54'$,	$\sin z_1 = 0{,}882$,	$\Phi - \varphi_1 = +\,2'',01$
„ 64 Draconis,	„	$z_1 = 64^0\,54'$,	$\sin z_1 = 0{,}905$,	$\Phi - \varphi_1 = +\,1'',68$
„ α Cephei,	„	$z_1 = 67^0\,22'$,	$\sin z_1 = 0{,}923$,	$\Phi - \varphi_1 = +\,1'',75$

und hat daraus die ursprünglichen Bedingungsgleichungen

1. β Geminorum . . .	$0{,}86 = -p + 0{,}380\,q$	mit dem Gewicht	$9^1/_3$
2. α Tauri	$1{,}00 = -p + 0{,}567\,q$	„ „ „	$1^1/_3$
3. α Orionis	$0{,}58 = -p + 0{,}686\,q$	„ „ „	$4^1/_3$
4. δ Hydrae	$0{,}08 = -p + 0{,}701\,q$	„ „ „	6
5. β Orionis	$2{,}85 = -p + 0{,}858\,q$	„ „ „	4
6. α Canis majoris	$1{,}30 = -p + 0{,}922\,q$	„ „ „	7
7. δ Ursae minoris	$-0{,}99 = -p - 0{,}678\,q$	„ „ „	$11^2/_3$
8. δ Draconis	$-2{,}01 = -p - 0{,}882\,q$	„ „ „	11
9. 64 Draconis	$-1{,}68 = -p - 0{,}905\,q$	„ „ „	$6^2/_3$
10. α Cephei	$-1{,}75 = -p - 0{,}923\,q$	„ „ „	2

Die Berechnung der Werthe $[g.aM]$, $[g.a^2]$, $[g.ab]$, $[g.bM]$, $[g.b^2]$ ersieht man aus folgender Zusammenstellung

Stern.	$g.aM$	$g.a^2$	$g.ab$	$g.bM$	$g.b^2$
β Gem. . .	− 8,03	9,33	− 3,550	+ 3,050	+ 1,348
α Tauri . .	− 1,33	1,33	− 0,756	+ 0,756	0,429
α Orion. . .	− 2,51	4,33	− 2,973	+ 1,724	2,039
δ Hydrae .	− 0,48	6	− 4,206	+ 0,337	2,948
β Orion. . .	− 11,40	4	− 3,432	+ 9,781	2,945
α Can. maj.	− 9,10	7	− 6,454	+ 8,390	5,951
δ Urs. min.	+ 11,55	11,67	+ 7,910	+ 7,831	5,363
δ Dracon. .	+ 22,11	11	+ 9,702	+ 19,501	8,557
64 Dracon.	+ 11,20	6,67	+ 6,033	+ 10,136	5,460
α Ceph. . .	+ 3,50	2	+ 1,846	+ 3,231	1,704
	+ 15,51	63,33	+ 4,12	+ 64,74	+ 36,74
	$= [g.aM]$	$= [g.a^2]$	$= [g.ab]$	$[g.bM]$	$[g.b^2]$

Man hat folglich die beiden Normalgleichungen

$$15{,}51 = 63{,}33\,p + 4{,}12\,q$$
$$64{,}74 = 4{,}12\,p + 36{,}74\,q$$

und aus ihnen

$$p = 0'',131 \text{ (beiläufig mit dem wahrsch. Fehler } \pm 0'',130)$$
$$q = 1'',751 \text{ („ „ „ „ „ } \pm 0'',171).$$

Die gesuchte Breite des Beobachtungsorts ist also

$$50^0 44' 9'' + 0'',131 = 50^0 44' 9'',13 \ (\pm 0'',13)$$

und die Durchbiegungs-Constante des Instruments 1″,751, also die Correction für Durchbiegung bei einer Zenithdistanz z

$$= + 1'',751 \,.\, \sin z.$$

III. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben, welche auf transcendente Gleichungen führen.

44. Das Verfahren, welches man einzuschlagen hat, wenn die Function F in Bezug auf die Unbekannten nicht lineär ist, kommt im Wesentlichen auf die schon vielfach im Vorigen empfohlene Methode der Anwendung von Näherungswerthen hinaus, welche man verbunden mit gewissen noch zu ermittelnden Correctionen statt der alten Unbekannten in die Gleichungen einführt. Man wird alsdann die erhaltenen Functionen nach dem Taylor'schen Satze für mehrere Unbekannte entwickeln, und wegen der Kleinheit der Correctionen die folgenden Potenzen weglassen können, wodurch man auf soviel lineäre Gleichungen geführt wird, als ursprüngliche Gleichungen aus den Beobachtungen sich ergaben, und aus diesen lineären Gleichungen die Correctionen auf dem vorhin sub B gezeigten Wege finden. Sollte es sich dabei zuletzt ergeben, dass die berechneten Werthe der Correctionen zu gross werden, als dass man ihre höhern Potenzen vernachlässigen dürfte, so müsste man die Rechnung mit den vermittelst der berechneten

Correctionen zu verbessernden Näherungswerthen oder überhaupt mit verbesserten Näherungswerthen wiederholen. (Vergl. darüber das letzte Beispiel am Schluss.)

Die Näherungswerthe selbst endlich erhält man immer, wenn man nicht durch Schätzung zu ihnen gelangen will, indem man soviele der gegebenen Gleichungen, als Unbekannte da sind, direct nach diesen Unbekannten löst.

Das Specielle des Verfahrens wird, um Wiederholung zu vermeiden, bei der wirklichen Lösung einer Aufgabe dieser Art am besten zu zeigen sein.

45. Aufgabe: Ermittelung der Coordinaten eines gewissen Punktes, wenn die Coordinaten und Azimuthe mehrerer anderer Punkte gegeben sind.

Es sind gegeben eine Anzahl Schnitte des Schlossthurms in Oldenburg, nämlich

	Coordinaten des Standpunkts		Azimuthe von Süd durch West
	a	b	A
Crapendorf	+ (Süd) 8713,80	+ (West) 3232,26 R. R.	20°21′ 6″
Altenoythe	+ 3150,24	+ 6080,12	62 36 38
Westerstede	— 3547,27	+ 5113,88	124 44 50
Rastede	— 3170,50	+ 293,56	174 42 36
Golzwarden	— 6332,07	+ 4390,41	214 44 10
Berne	— 1368,10	— 4631,48	253 32 36
Bremen, Ansgariithurm	+ 1710,06	— 10446,07	279 17 49
Ganderkese.	+ 3092,16	— 5875,14	297 45 30
Wildeshausen.	+ 7050,85	— 3948,20	330 45 10

Gesucht sind die Coordinaten des Schlossthurms.

Die Angaben sind einer übersichtlichen Zusammenstellung der Coordinaten der einzelnen Ortschaften Oldenburgs entnommen, welche als Resultat der von 1835 bis 1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogthums durch den Herrn Geh. Hofrath Freiherrn von Schrenck in Oldenburg veröffentlicht sind. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist aber jener Schlossthurm; wir werden also seine Coordinaten als $= 0$ erhalten müssen.

Es seien nun die gesuchten Coordinaten x, y, so sind offenbar folgende Gleichungen zu lösen:

$$\frac{y-b}{x-a} = tang\, A \qquad \text{oder} \qquad arc\ tang\, \frac{y-b}{x-a} = A$$

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = tang\, A_1 \text{ u. s. w.} \qquad arc\ tang\, \frac{y-b_1}{x-a_1} = A_1 \text{ u. s. w.}$$

Nun wissen wir freilich hier im Voraus, dass x und y sehr kleine Grössen sein werden; um aber das Beispiel so zu rechnen, dass man die Behandlung auch anderer Aufgaben, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt liegende Punkte betreffen, aus unserer Methode ersehen könne, nehmen wir auf jenen Umstand weiter keine Rücksicht.

46. Die erste Arbeit ist also, gute Näherungswerthe für x und y zu beschaffen; sie mögen p und q heissen und noch der Correctionen ξ und η bedürfen, um x und y gleich zu werden, d. h. wir gehen aus von den Hülfsgleichungen

$$x = p + \xi$$
$$y = q + \eta$$

Durch ihre Einführung in die ursprünglichen Gleichungen gehen diese über in

$$arc\ tang\, \frac{q+\eta-b}{p+\xi-a} = A$$

$$arc\ tang\, \frac{q+\eta-b_1}{p+\xi-a_1} = A_1$$

oder wenn man der Kürze halber

$$q - b = m$$
$$q - b_1 = m_1 \text{ u. s. w.}$$
$$\text{ferner} \quad p - a = n$$
$$p - a_1 = n_1 \quad \text{setzt,}$$

$$arc\ tang\, \frac{m+\eta}{n+\xi} = A$$

$$arc\ tang\, \frac{m_1+\eta}{n_1+\xi} = A_1 \text{ u. s. w.}$$

Wenn hier η und ξ sehr kleine Grössen sind, so kann man bei der Entwickelung von *arc tang* nach dem Taylor'schen Satze alle nach dem zweiten folgenden Glieder vernachlässigen. Hat man aber eine $f(\eta, \xi)$, worin η in $\eta + h$, ξ in $\xi + k$ übergeht, so wird nach Taylor

$$f(\eta + h, \xi + k) = f(\eta, \xi) + \frac{h . d f(\eta, \xi)}{d\eta} + \frac{k\, d f(\eta, \xi)}{d\xi} + \ldots,$$

welche Gleichung für $\eta = \xi = 0$, und $h = \eta$, $k = \xi$ übergeht in

$$f(\eta, \xi) \quad = f(0{,}0) + \frac{\eta . d f(0{,}0)}{d\eta} + \frac{\xi . d f(0{,}0)}{d\xi} + \ldots,$$

also unter Vernachlässigung der folgenden Glieder

$$f(\eta, \xi) \quad = f(0{,}0) + \frac{\eta\, d f(0{,}0)}{d\eta} + \frac{\xi\, d f(0{,}0)}{d\xi}.$$

Nun ist $\quad d . arc\ tang\ x = \frac{dx}{1 + x^2}$,

also hier $\quad d . arc\ tang \frac{m + \eta}{n + \xi} = \frac{d . \frac{m + \eta}{n + \xi}}{1 + \left(\frac{m + \eta}{n + \xi}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{(n + \xi)\, d\eta - (m + \eta)\, d\eta}{(n + \xi)^2}}{\frac{(n + \xi)^2 + (m + \eta)^2}{(n + \xi)^2}}$$

$$= \frac{(n + \xi)\, d\eta - (m + \eta)\, d\eta}{(n + \xi)^2 + (m + \eta)^2},$$

aber da ξ und η sehr klein, $\quad = \frac{n . d\eta - m . d\xi}{n^2 + m^2}$

$$= \frac{n . d\eta}{n^2 + m^2} - \frac{m\, d\xi}{n^2 + m^2}.$$

Also wird unsere Gleichung

$$arc\ tang \frac{m + \eta}{n + \xi} = A \quad \text{übergehen in}$$

$$arc\ tang \frac{m + \eta}{n + \xi} = arc\ tang \frac{m}{n} + \frac{n}{n^2 + m^2}\eta - \frac{m}{n^2 + m^2}\xi = A$$

oder

$$\frac{n}{n^2 + m^2}\eta - \frac{m}{n^2 + m^2}\xi + arc\ tang \frac{m}{n} - A = 0.$$

Ebenso ferner

$$\frac{n_1}{n_1^2 + m_1^2}\eta - \frac{m_1}{n_1^2 + m_1^2}\xi + arc\ tang \frac{m_1}{n_1} - A_1 = 0$$

$$\frac{n_2}{n_2^2 + m_2^2}\eta - \frac{m_2}{n_2^2 + m_2^2}\xi + arc\ tang \frac{m_2}{n_2} - A_2 = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

welche lineäre Gleichungen jetzt statt der früheren transcendenten zu lösen wären. Zu dem Ende hätte man wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate jede Gleichung mit dem Coefficienten von je einer der beiden Unbekannten η und ξ zu multiplicieren und die erhaltenen Gleichungen zu addieren. Man würde dadurch auf zwei Normalgleichungen kommen von der Form

$$\alpha\eta + \beta\xi = \nu$$
$$\beta\eta + \gamma\xi = \mu,$$

welche auf gewöhnliche Art gelöst η und ξ, und durch Verbindung mit p und q auch x und y geben würden.

Soviel über die Lösung der Aufgabe im Allgemeinen.

47. Obiges Zahlenbeispiel angehend, so wäre die nächste Arbeit die Ermittelung der Näherungswerthe p und q, dann der Factoren $\frac{n}{n^2+m^2}$, $\frac{m}{n^2+m^2}$ u. s. w., und der Constanten $arc\ tang\ \frac{m}{n}$; worauf man zur Bildung der Normalgleichungen übergehen könnte.

Zur Ermittelung der Näherungswerthe für x und y empfehlen sich die beiden Gleichungen

$$\frac{y - b_6}{x - a_6} = tang\ A_6$$
$$\frac{y - b_8}{x - a_8} = tang\ A_8,$$

da Bremen und Wildeshausen Dreiecken erster Ordnung angehören.

Aus ihnen folgt

$$y - b_6 = x\ tang\ A_6 - a_6\ tang\ A_6$$
$$y - b_8 = x\ tang\ A_8 - a_8\ tang\ A_8$$
$$\overline{b_8 - b_6 = x\,(tang\ A_6 - tang\ A_8) + a_8\ tang\ A_8 - a_6\ tang\ A_6.}$$

Daraus $x = +\ 0{,}022 = p$ (wie oben bezeichnet wurde)
und $y = +\ 0{,}002 = q$ („ „ „ „).

Dass die Näherungswerthe hier so klein ausfallen, hat seinen Grund bekanntlich darin, dass oben schon die Erwartung ausgesprochen wurde, es würden die wahren Werthe von x und $y = 0$ werden.

Die Berechnungsweise der Factoren $\frac{n}{n^2+m^2}$, $\frac{m}{n^2+m^2}$ und der $arc\ tang\ \frac{m}{n}$, welche letztere natürlich nicht im Winkel- sondern im Bogenmaass auszudrücken sind, ersieht man aus folgender Zusammenstellung.

	Crapendorf.	Altenoythe.	Westerstede.	Rastede.	Golzwarden.	Berne.	Bremen.	Ganderkese.	Wildeshausen
m	— 3232,258	— 6080,118	— 5113,878	— 293,558	— 4390,408	+ 4631,482	+ 10 446,072	+ 5875,142	+ 3948,202
n	— 8713,778	— 3150,218	+ 3547,292	+ 3170,522	+ 6332,092	+ 1368,122	— 1 710,038	— 3092,138	— 7050,828
$\log m$	3,509 5061	3,783 9120	3,708 7504	2,467 6939	3,642 5049	3,665 7200	4,018 9530	3,769 0184	3,596 3993
$\log n$	3,940 2065	3,498 3406	3,549 8969	3,501 1308	3,801 5471	3,136 1248	3,233 0057	3,490 2588	3,848 2401
$\log \frac{m}{n} = \log tang$	9,569 2996	0,285 5714	0,158 8535	8,966 5631	9,840 9578	0,529 5952	0,785 9473	0,278 7596	9,748 1592
$arc.$	20° 21′ 5″,963	62° 36′ 37″,847	124°44′50″,956	174°42′36″,280	214° 44′ 8″,986	253°32′35″,019	279°17′49″,006	297°45′29″,575	330°45′10″,061
$\log m^2$	7,019 0122	7,567 8240	7,417 5008	4,935 3878	7,285 0098	7,331 4400	8,037 9060	7,538 0368	7,192 7986
$\log n^2$	7,880 4130	6,996 6812	7,099 7938	7,002 2616	7,603 0942	6,272 2496	6,466 0114	6,980 5176	7,696 4802
m^2	1044 7497	3696 7834	2615 1754	8 6176	1927 5680	2145 0624	10912 0403	3451 7300	1558 8293
n^2	7592 9935	992 3872	1258 3278	1005 2212	4009 5365	187 1758	292 4229	956 1314	4971 4170
$m^2 + n^2$	8637 7432	4689 1706	3873 5032	1013 8388	5937 1045	2332 2382	11204 4632	4407 8614	6530 2463
$\log (m^2 + n^2)$	7,936 4002	7,671 0960	7,588 1039	7,005 9689	7,773 5747	7,367 7729	8,049 3910	7,644 2279	7,814 9295
$\log \frac{n}{m^2 + n^2}$	— 6,003 8063	— 5,827 2446	+ 5,961 7930	+ 6,495 1619	+ 6,027 9724	+ 5,768 3519	— 5,183 6147	— 5,846 0309	— 6,033 3106
$\log \frac{m}{m^2 + n^2}$	— 5,573 1059	— 6,112 8160	— 6,120 6465	— 5,461 7250	— 5,868 9302	+ 6,297 9471	+ 5,969 5620	+ 6,124 7905	+ 5,781 4698
$arc\ tang \frac{m}{n} - A$	— 0″,037	— 0″,153	+ 0″,956	+ 0″,280	— 1″,014	— 0″,981	+ 0″,006	— 0″,425	+ 0″,061
dessen $\log$	0,568 2017 — 2	0,184 6914 — 1	0,980 4579 — 1	0,447 1580 — 1	0,006 0380	0,991 6690 — 1	0,778 1513 — 3	0,628 3889 — 1	0,785 3298 —
$\log arc = Rad$	5,314 4251	5,314 4251	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\log arc\ tg \frac{m}{n} - A$ im Bogenmaass	3,253 7766	3,870 2663	4,666 0328	4,132 7329	4,691 6129	4,677 2439	2,463 7262	4,313 9638	3,470 9047

Da zur später vorzunehmenden Bildung der Normalgleichungen wieder Logarithmen gebraucht werden, so empfiehlt es sich in den ursprünglichen Gleichungen nicht die Factoren $\frac{n}{n^2+m^2}$ u. s. w. selbst auszurechnen, sondern mit ihren Logarithmen sich zu genügen. Man müsste dann freilich überall fortan *num.log* schreiben, wenn man die Factoren selbst meint, kann indessen zur Abkürzung bloss die Logarithmen selbst setzen. Um sodann die negativen Logarithmen zu vermeiden, ist es zweckmässig, sich die ursprünglichen Gleichungen mit 100 000 000 multipliciert, d. h. zu den Logarithmen der Factoren und Constanten 8 Einheiten addiert zu denken, wodurch man überall positive Logarithmen resp. ganze Zahlen erhält. Endlich ist natürlich Rücksicht auf die Vorzeichen der $\frac{n}{n^2+m^2}$, $\frac{m}{n^2+m^2}$ u. s. w. zu nehmen, welche bloss von dem Zähler der Brüche abhängig sind, und zu bedenken, dass das zweite Glied im Allgemeinen negativ war. Man hat dann statt der allgemeinen Gleichungen

$$\frac{n}{n^2+m^2}\eta - \frac{m}{n^2+m^2}\xi + arc\ tang\ \frac{m}{n} - A = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

jetzt im Zahlenbeispiel die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
-\ 4{,}003\,8063\ \eta + 3{,}573\,1059\ \xi - 1{,}253\,7766 = 0 \\
-\ 3{,}827\,2446\ \eta + 4{,}112\,8160\ \xi - 1{,}870\,2663 = 0 \\
+\ 3{,}961\,7930\ \eta + 4{,}120\,6465\ \xi + 2{,}666\,0328 = 0 \\
+\ 4{,}495\,1619\ \eta + 3{,}461\,7250\ \xi + 2{,}132\,7329 = 0 \\
+\ 4{,}027\,9724\ \eta + 3{,}868\,9302\ \xi - 2{,}691\,6129 = 0 \\
+\ 3{,}768\,3519\ \eta - 4{,}297\,9471\ \xi - 2{,}677\,2439 = 0 \\
-\ 3{,}183\,6147\ \eta - 3{,}969\,5620\ \xi + 0{,}463\,7262 = 0 \\
-\ 3{,}846\,0309\ \eta - 4{,}124\,7905\ \xi - 2{,}313\,9638 = 0 \\
-\ 4{,}033\,3106\ \eta - 3{,}781\,4698\ \xi + 1{,}470\,9047 = 0,
\end{array}$$

wo überall *num log* statt des geschriebenen *log* zu lesen ist. Zur Bildung der Normalgleichungen addiere man nun überall den *log* je einer Unbekannten z. B. η zu sich und den beiden übrigen Logarithmen, schlage dann überall die zugehörigen Zahlen auf, und addiere sämmtliche Gleichungen, wie folgt:

$8{,}007\,6126\,\eta - 7{,}576\,9122\,\xi = -5{,}257\,5829$	oder	$1\,0176\,8305\,\eta - 3774\,9578\,\xi = -18\,0960$
$7{,}654\,4892\,\eta - 7{,}940\,0606\,\xi = -5{,}697\,5109$	"	$4513\,2472\,\eta - 8710\,8520\,\xi = -49\,8323$
$7{,}923\,5860\,\eta + 8{,}082\,4395\,\xi = -6{,}627\,8258$	"	$8386\,6020\,\eta + 1\,2090\,3670\,\xi = -424\,4492$
$8{,}990\,3238\,\eta + 7{,}956\,8869\,\xi = -6{,}627\,8948$	"	$9\,7796\,6222\,\eta + 905\,4966\,\xi = -424\,5167$
$8{,}055\,9448\,\eta + 7{,}896\,9026\,\xi = +6{,}719\,5853$	"	$1\,1374\,8260\,\eta + 7886\,8320\,\xi = +524\,3065$
$7{,}536\,7038\,\eta - 8{,}066\,2990\,\xi = +6{,}445\,5958$	"	$3441\,1516\,\eta - 1\,1649\,0105\,\xi = +278\,9946$
$6{,}367\,2294\,\eta + 7{,}153\,1767\,\xi = +3{,}647\,3409$	"	$232\,9322\,\eta + 1422\,9075\,\xi = +4440$
$7{,}692\,0618\,\eta + 7{,}970\,8214\,\xi = -6{,}159\,9947$	"	$4921\,0944\,\eta + 9350\,2100\,\xi = -144\,5422$
$8{,}066\,6212\,\eta + 7{,}814\,7804\,\xi = +5{,}504\,2153$	"	$1\,1657\,9214\,\eta + 6528\,0046\,\xi = +31\,9312$

Daraus 1) $15\,2501\,2275\,\eta + 1\,4048\,9974\,\xi = -225\,7601$

Wegen der zweiten Normalgleichung ist nur noch auf den Factor von ξ und die Constante zu achten:

$\ldots\ldots + 7{,}146\,2118\,\xi = +4{,}826\,8825$	oder	$\ldots\ldots + 1400\,2700\,\xi = +6\,7125$
$8{,}225\,6320\,\xi = +5{,}983\,0823$	"	$16812\,4893\,\xi = +96\,1795$
$8{,}241\,2930\,\xi = -6{,}786\,6793$	"	$1\,7429\,8240\,\xi = -611\,8981$
$6{,}923\,4500\,\xi = -5{,}594\,4579$	"	$838\,3976\,\xi = -39\,3059$
$7{,}737\,8604\,\xi = +6{,}560\,5431$	"	$5468\,4012\,\xi = +363\,5323$
$8{,}595\,8942\,\xi = -6{,}975\,1910$	"	$3\,9436\,1182\,\xi = -944\,4760$
$7{,}939\,1240\,\xi = +4{,}433\,2882$	"	$8692\,0882\,\xi = +2\,7120$
$8{,}249\,5810\,\xi = -6{,}438\,7543$	"	$1\,7765\,6450\,\xi = -274\,6340$
$7{,}562\,9396\,\xi = +5{,}252\,3745$	"	$3655\,4392\,\xi = +17\,8803$

Daraus 2) $1\,4048\,9974\,\eta + 11\,1498\,6727\,\xi = -1383\,2974$

Aus diesen beiden Normalgleichungen findet man sodann durch einfache Elimination, die mit Hülfe von Logarithmen sich leicht bewerkstelligen lässt,

$$\xi = -0{,}0124\,4940$$
$$\eta = -0{,}0003\,4142$$
$$\text{mithin } x = 0{,}022 - 0{,}012 = 0{,}010$$
$$y = 0{,}002 - 0{,}000 = 0{,}002.$$

Die Resultate sind also nahezu Null, wie erwartet wurde. Die geringe Abweichung wird zunächst darin ihren Grund haben können, dass die Decimalen der Winkel sich in den veröffentlichten Mittheilungen nicht finden.

Anm. Wir haben die Rechnung absichtlich mit soviel Decimalen geführt, um den Anfänger, wenn er dieselben nachrechnet, zu veranlassen, sie mit weniger Stellen zu führen, und sein Urtheil zu üben, wie viel Stellen entbehrlich waren.

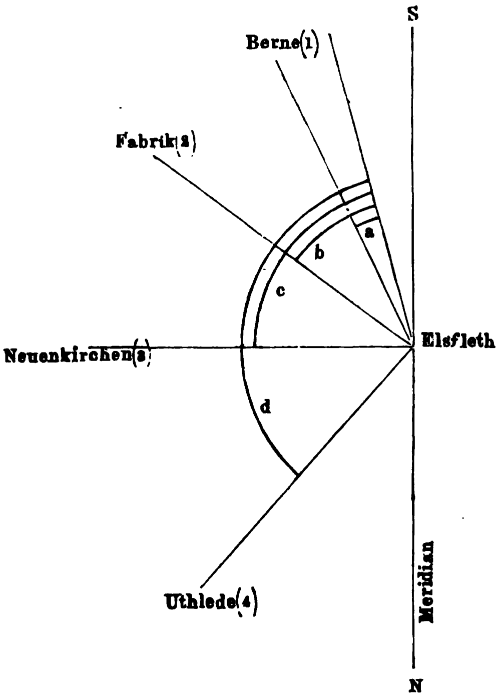
48. Das Pothenot'sche Problem, mit **nicht** orientiertem Azimuth.

Ein einfacheres Beispiel entnehme ich vorab einigen vorigen Sommer hier am Orte angestellten Messungen, als ich die Lage eines Punktes bestimmen wollte, wo vielleicht ein Gebäude für die Oldenb. Navigationsschule gebaut werden könnte. Der Punkt sollte dann der Aufstellungsort des Passageninstruments werden und seine Lage sollte zunächst geodätisch durch seine Coordinaten vom Schlossthurme und durch das Azimuth von einem benachbarten Kirchthurme, z. B. von Berne, bestimmt werden. Die eigenen Messungen sind arithmetische Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen, welche mit einem Pistor'schen Patentsextanten, No. 328, 10″ Ablesung gestattend, angestellt sind; die eingeschnittenen Punkte sind

Berne, dessen geodätische Coordinaten von Oldenburg gegeben sind, ...	Abscisse $a = 1368{,}10$	Nord
	Ordinate $b = 4631{,}48$	Ost
Neuenkirchen	$a = 2878{,}33$	N.
	$b = 5277{,}75$	O.
Uthlede	$a = 5053{,}42$	N.
	$b = 6352{,}81$	O.

Berne ist ein oldenburgischer Dreieckspunkt zweiter Ordnung, Neuenkirchen, Uthlede sind hannoversche Dreieckspunkte dritter Ordnung. Das Azimuth von Berne ist nicht orientiert;

es werde vorab zu 18° angenommen, d. h. S 18° Ost; um sodann die Azimuthe von N. und U. zu erhalten, ist noch ein zwischen Berne und Neuenkirchen belegener Fabrikschornstein benutzt, und der westliche Schornsteinrand in die Winkelmessung hineingezogen. Gemessen ist nun, conf. folgende Skizze,



$$
\begin{array}{lrl}
\sphericalangle\ 1)\ldots2) & 34^0\,52'\,55'',500 & = -a+b \\
\sphericalangle\ 2)\ldots3) & 47^0\;\;0'\,25'',667 & = \quad\;\; -b+c \\
\sphericalangle\ 1)\ldots3) & 81^0\,53'\,30'',667 & = -a \quad\;\; +c \\
\sphericalangle\ 2)\ldots4) & 93^0\,27'\,48'',333 & = \quad\;\; -b \quad\;\; +d \\
\sphericalangle\ 3)\ldots4) & 46^0\,27'\,35'',500 & = \quad\;\;\quad\;\; -c+d \\
\sphericalangle\ 1)\ldots4) & 128^0\,21'\,27'',833 & = -a \quad\;\;\quad\;\; +d
\end{array}
$$

welche Messungen zuvörderst unter einander auszugleichen wären. Vergl. 28.

49. Unter $\sphericalangle\, a$ hat man sich einen beliebigen fingierten Winkel vorzustellen, den wir nur einführen wegen der mehrgenannten Controle und Leichtigkeit der Auswerthung der der

Wahrheit am nächsten kommenden Grössen der Winkel

$$\begin{aligned} 1)\ldots 2) &= b\ (-a) \\ 1)\ldots 3) &= c\ (-a) \\ 1)\ldots 4) &= d\ (-a) \end{aligned}$$

Um zunächst Näherungswerthe zu erhalten, summiere man 1)..2) und 2)..3), so sieht man ihre Summen um 9″,5 kleiner als 1)..3) gemessen ist; man vermehre also die ersten Winkel 1)..2) um $\frac{9'',5}{3} = 3'',2$, so hat man als Näherungswerth

$$\text{für } b = 34^0\,52'\,58'',700 + b_1$$

und vermindere den dritten $<$ 1)...3) um 3″,2, so hat man als Näherungswerth für $c = 81^0\,53'\,27'',467 + c_1$

Aehnlicher Weise erhält man durch 1)...3) und 3)...4) verglichen mit 1)...4) $d = 128^0\,21'\,20'',511 + d_1$

Setzt man nun diese Werthe für b, c, d und nimmt Gleiches auf beiden Seiten weg, so hat man unter Weglassung der Accente

$$\begin{array}{rcrrrr} -\ 3'',200 &=& -a & +b & & \\ -\ 3\ ,100 &=& & -b & +c & \\ +\ 3\ ,200 &=& -a & & +c & \\ -\ 33\ ,478 &=& & -b & & +d \\ -\ 17\ ,544 &=& & & -c & +d \\ +\ 7\ ,322 &=& -a & & & +d \end{array}$$

Daraus bilde man die Normalgleichungen auf bekannte Weise, und werthe sie aus wie oben, so hat man folgende Rechnung:

Normalgleichungen.	$d - 14566$	$a - 7296$	$b + 3838$
$0 = 3a - b - c - d + 7,322$	$+21888$	0	-3838
$0 = -a + 3b - c - d - 33,378$	-18812	-11516	-2
$0 = -a - b + 3c - d - 17,644$	-3078	$+4218$	$+380$
$0 = -a - b - c + 3d + 43,700$	$+2$	$+7298$	$+3460$

$a + 1279$	$d - 727$	$a - 242$	$b + 104$	$d - 46$	$a + 19$	$b - 9$	$d + 3$	$a - 2$
-1	$+726$	0	-104	-58	-1	$+8$	$+5$	-1
-1281	-554	-312	0	$+46$	$+27$	0	-3	-1
-899	-172	$+70$	-34	$+12$	-7	$+2$	-1	$+1$
$+2181$	0	$+242$	$+138$	0	-19	-10	-1	$+1$

Also hat man $\Sigma\,(a) = -\,6{,}242$, $\Sigma\,(b) = +\,3{,}933$, $\Sigma\,(d) = -\,15{,}336$ die Correctionen der Näherungswerthe enthaltend, oder man hat

$$\begin{aligned} b &= 34^0\,52'\,58'',700 + 3'',933 + 6'',242 \\ c &= 81^0\,53'\,27'',467 + 0 \qquad + 6'',242 \\ d &= 128^0\,21'\,20'',511 - 15'',336 + 6'',242, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < 1)\ldots 2) &= -a + b = 34^0\,52'\,58'',700 + 6'',242 + 3'',933 \\ &= 34^0\,53'\,8'',875 \\ < 1)\ldots 3) &= -a + c = 81^0\,53'\,27'',467 + 6'',242 \\ &= 81^0\,53'\,33'',709 \\ < 1)\ldots 4) &= -a + d = 128^0\,21'\,20'',511 + 6'',242 - 15'',336 \\ &= 128^0\,21'\,11'',417 \end{aligned}$$

u. s. w.

Da die Coordinaten der Fabrik unbekannt, so sind für den weitern Zweck nur von Belang die Winkel 1)...3) und 1)...4), und können die andern deshalb übergangen werden. Dass die Genauigkeit der Rechnung auf Tausendtel Sekunden mit der Genauigkeit der Messung auf 10 Sekunden resp. 3 Sekunden im Missverhältniss steht, ist nicht zu läugnen, indessen sind in der fernern Rechnung die Coordinaten in 0,01 Ruthen gegeben, ausserdem kommen grosse Zahlen vor, welche die Anwendung 7stelliger Logarithmen entschuldigen können: so mag jene übergrosse Genauigkeit mit passieren. Vergl. unten 51.

50. Die Aufgabe stellt sich nun, wie folgt:

Ort.	Nicht orientiertes Azimuth.		Abscisse.		Ordinate.	
Berne	A	S 18^0 Ost	a	$= 1368{,}10$ N.	b	$= 4631{,}48$ O.
Neuenkirchen .	A_1	S $99^0\,53'\,33'',709$ Ost	a_1	$= 2878{,}33$ N.	b_1	$= 5277{,}75$ O.
Uthlede . . .	A_2	S $146^0\,21'\,11'',417$ Ost	a_2	$= 5053{,}42$ N.	b_2	$= 6352{,}81$ O.

Gefragt ist das genaue Azimuth von Berne und die Coordinaten x, y des Punktes, von dem aus die Winkel Berne-Neuenkirchen und Berne-Uthlede eingeschnitten sind.

Die Correction des Azimuths von Berne sei z, so hat man sofort die Gleichungen

$$\frac{b-y}{x-a} = tang\,(A+z)$$

$$\frac{b_1-y}{x-a_1} = tang\,(A_1+z)$$

$$\frac{b_2-y}{x-a_2} = tang\,(A_2+z)$$

statt welcher man alsbald setzen darf, indem man sich unter u, u_1, u_2 einen beliebigen Werth denkt,

$$\begin{aligned}
b-y &= u\,.\,sin\,(A+z)\\
x-a &= u\,.\,cos\,(A+z)\\
b_1-y &= u_1\,.\,sin\,(A_1+z)\\
x-a_1 &= u_1\,.\,cos\,(A_1+z)\\
b_2-y &= u_2\,.\,sin\,(A_2+z)\\
x-a_2 &= u_2\,.\,cos\,(A_2+z).
\end{aligned}$$

Eliminiere x, y,

also

$$\begin{aligned}
b-b_1 &= u\,.\,sin\,(A+z) - u_1\,.\,sin\,(A_1+z)\\
a_1-a &= u\,.\,cos\,(A+z) - u_1\,.\,cos\,(A_1+z)\\
b-b_2 &= u\,.\,sin\,(A+z) - u_2\,.\,sin\,(A_2+z)\\
a_2-a &= u\,.\,sin\,(A+z) - u_2\,.\,sin\,(A_2+z).
\end{aligned}$$

Daraus hat man leicht

$$\frac{(b-b_1)\,cos\,(A_1+z)-(a_1-a)\,sin\,(A_1+z)}{(b-b_2)\,cos\,(A_2+z)-(a_2-a)\,sin\,(A_2+z)} = \frac{sin\,(A-A_1)}{sin\,(A-A_2)},$$

in welcher Gleichung die u, u_1, u_2 schon wieder eliminiert sind, und nur noch eine Unbekannte z sich findet. Um sie zu finden, setze

$$(b-b_1)^2+(a_1-a)^2=m^2,\quad (b-b_2)^2+(a_2-a)^2=m_1^2,$$

ferner

$$\frac{b-b_1}{m} = sin\,\varphi,\qquad \frac{b-b_2}{m_1} = sin\,\varphi_1,$$

$$\frac{a_1-a}{m} = cos\,\varphi,\qquad \frac{a_2-a}{m_1} = cos\,\varphi_1,$$

so geht obige Gleichung über in

$$\frac{m\,sin\,\varphi\,cos\,(A_1+z)-m\,cos\,\varphi\,sin\,(A_1+z)}{m_1\,sin\,\varphi_1\,cos\,(A_2+z)-m_1\,cos\,\varphi_1\,sin\,(A_2+z)} = \frac{sin\,(A-A_1)}{sin\,(A-A_2)}$$

oder

$$\frac{sin\,((A_1+z)-\varphi)}{sin\,((A_2+z)-\varphi_1)} = \frac{m_1\,sin\,(A-A_1)}{m\,sin\,(A-A_2)} = tang\,\vartheta,$$

ferner

$$\frac{sin\,(A_2+z-\varphi_1)-sin\,(A_1+z-\varphi)}{sin\,(A_2+z-\varphi_1)+sin\,(A_1+z-\varphi)} = \frac{1-tang\,\vartheta}{1+tang\,\vartheta} = tang\,(45^0-\vartheta)$$

$$cot\,\frac{A_2+A_1+2z-(\varphi_1+\varphi)}{2}\;tang\,\frac{A_2-A_1+\varphi-\varphi_1}{2} = tang\,(45^0-\vartheta),$$

oder endlich

$$tang\left(z+\frac{A_2+A_1-(\varphi+\varphi_1)}{2}\right)=cot(45^0-\vartheta).tang\frac{A_2-A_1+\varphi-\varphi_1}{2}.$$

Daraus ist z zu finden.

Man findet nach einander $m^2 = 269\,8459,57$

$$log\ m = 3,215\,5580$$

$$\varphi = 336^0\,49'\,57'',154,$$ weil der Sinus negativ wird durch $b-b_1$, ferner der Cosinus positiv ist,

$$m_1^2 = 1654\,4557,5$$

$$log\ m_1 = 3,609\,3276$$

$$\varphi_1 = 334^0 57' 49'',615.$$

Sodann, weil Zähler und Nenner beide negativ, also Winkel *per tang.* im dritten Quadranten

$$\vartheta = 252^0\,15'\,37'',092$$

$$45^0 - \vartheta = -\ 207^0\,15'\,37'',092. —$$

Endlich hat man $z = 351^0\,13'\,36'',556$ oder

was hier gleichbedeutend ist $= -\ 8^0\,46'\,23'',444.$

Mithin wäre das wahre Azimuth, oder

$A + z$ d. h. Azimuth von Berne $= S\ \ 9^0\,13'\,36''556$ Ost

$A_1 + z$ „ „ „ Neuenk. $= S\ \ 91^0\ \ 7'\,10'',265$ Ost

$A_2 + z$ „ „ „ Uthlede $= S\ \ 137^0\,34'\,47'',973$ Ost.

Die Correction für das Azimuth ist sehr beträchtlich ausgefallen und die Rechnung nur deshalb nicht wiederholt, weil dem Resultat wegen später eingetretener Ereignisse jeder praktische Werth abgeht. Da Berne magnetisch $S\ 8^0\,36'$ W. von jenem Punkte peilt, so würde die Declination der Magnetnadel sich $= 17^0 54'$ ergeben, welcher Werth entschieden zu gross ist. Vergl. weiter unten No. 51.

Man hätte nun schliesslich aus den beiden ersten Gleichungen leicht

$$x = 2866,453\ \text{N}.$$

$$y = 4388,080\ \text{O}.$$

als Coordinaten des Beobachtungs-Punktes.

51. Es sei hier noch ein ähnliches Beispiel eingeschaltet, bis wir dazu übergehen, die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Aufgaben solcher Art zu zeigen. Es diene zugleich als Beweis, dass 5stellige Logarithmen in Fällen dieser Art hinreichende Genauigkeit gewähren, also bei der unverhältnissmässig grössern Bequemlichkeit der Rechnung entschieden vorzuziehen sind.

Der Standpunkt ist der Flaggenpfahl an der Kaje zu Elsfleth. Mit demselben Pistor'schen Sextanten, dessen Indexfehler vor der Messung durch dreimalige Messung des Sonnenhalbmessers zu — 46″ bestimmt wurde, sind gemessen die Winkel

2) Uthlede-Neuenkirchen	49° 17′ 33″	Jeder Winkel durch 8malige Ablesung vom Doppelnonius.
3) Uthlede-Berne	129° 23′ 16″	
1) Neuenkirchen-Berne .	80° 6′ 27″	

Nach geschehener Messung war der Indexfehler, wahrscheinlich auch durch Temperatureinflüsse veranlasst, auf — 42″ gesunken, weshalb ein mittlerer Fehler von — 44″ in Rechnung zu bringen wäre. Man hat dann die Winkel

Berne-Neuenkirchen . 80° 5′ 43″
Neuenkirchen-Uthlede 49° 16′ 49″
Berne-Uthlede . . . . . 129° 22′ 32″.

Um einen bessern Werth für das Azimuth von Berne zu erhalten, sei es jetzt zu S 10° Ost angenommen. Dann wird die Aufgabe folgende:

Punkte.	Nicht orientiertes Azimuth.	Abscisse.	Ordinate.
Berne	$A = 10^0$	$a = 1368{,}10$	$b = 4631{,}48$
Neuenkirchen . .	$A_1 = 90^0\ 5'\ 43''$	$a_1 = 2878{,}33$	$b_1 = 5277{,}75$
Uthlede	$A_2 = 139^0\ 22'\ 31''$	$a_2 = 5033{,}42$	$b_2 = 6352{,}81$

Die Berechnung der Hülfsgleichungen, des z, endlich der Coordinaten des Beobachtungspunktes ist in folgender Rechnung enthalten:

$b - b_1 = -\ 646{,}27 ..\ log = 2{,}81042$
$a_1 - a = 1510{,}23 ..\ log = 3{,}17905$
$\angle = 23^0 10' 3'',4\ log\,tang\ 9{,}63137$
$\varphi = 336^0 49' 56'',6$

$2\,log\,(b - b_1) = 5{,}62084 ..$ Zahl $417\,680$
$2\,log\,(a_1 - a) = 6{,}35810$ „ $2280\,890$
$log = 6{,}43113$ Zahl $m^2 = 2698\,570$
$^1/_2\,log = 3{,}21557 = log\ m.$

$b - b_2 = -\ 1721{,}33 ..\ log = 3{,}23586$
$a_2 - a = 3685{,}32 ..\ log = 3{,}56648$
$\angle = 25^0 2' 9'',1\ log\,tang\ 9{,}66938$
$\varphi_1 = 334^0 57' 50'',9$

$2\,log\,(b - b_2) = 6{,}47172$ Zahl $296\,2867$
$2\,log\,(a_2 - a) = 7{,}13296$ „ $1358\,1900$
$log = 7{,}21865 ..$ Zahl $m_1^2 = 16544\,767$
$^1/_2\,log = 3{,}60933 = log\ m_1.$

Dazu $A - A_1 = -\ 80^0\ 5'\ 43''\ log\,sin = 9{,}99347\,n$
$colog\ m = 6{,}78443$
$A - A_2 = -\ 129^0\ 22'\ 31''\ log\,cosec\ 0{,}11182\,n$
$\angle = 72^0\ 24'\ 56'',4\ log\,tang\ 0{,}49905, +,$ Winkel ϑ im dritten Quadranten $\vartheta = 252^0\ 24'\ 56'',4$
$45 - \vartheta = -\ 207^0\ 24'\ 56'',4.$

$A_2 + A_1 =$	$229^\circ 28' 14''$	$A_2 - A_1 =$	$49^\circ 16' 48''$
$\varphi + \varphi_1 =$	$671^\circ 47' 47'',5$	$\varphi - \varphi_1 =$	$1^\circ 52' \; 5'',7$
$u =$	$-442^\circ 19' 26'',5$	$s =$	$51^\circ \; 8' 53'',7$
$u/_2 =$	$-221^\circ \; 9' 43'',3$	$s/_2 =$	$25^\circ 34' 26'',9$ *log tang* 9,67994
		$45 - \vartheta =$	$-207^\circ 24' 56'',4$ *log cot* 0,28509n
		$\angle =$	$42^\circ 41' 43'',8$ *log tang* 9,96503n

weil negativ im zweiten Quadranten $= 137^\circ 18' 16'',2.$

Man hat also

$$z - 221^\circ 9' 43'',3 = 137^\circ 18' 16'',2$$
$$z = 358^\circ 27' 59'',5$$

oder was hier gleichbedeutend ist $\quad z = -1^\circ 32' \; 0'',5.$

Also ist das wahre Azimuth von Berne, d. h. $A + z = S \;\; 8^\circ 27' 59'',5$ Ost
von Neuenk. „ $A_1 + z = S \;\; 88^\circ 33' 42'',5$ Ost
von Uthlede „ $A_2 + z = S \, 137^\circ 50' 30'',5$ Ost.

Anm. Mit dem jetzt gefundenen Werthe für das Azimuth von Berne ergeben magnetische Azimuth-Beobachtungen von im Mittel $S\ 8^\circ 30'$ W. eine westliche Declination der Nadel von $16^\circ 58'$, welches sehr gut zu sonstigen Wahrnehmungen stimmt. Vergl. auch Müller kosmische Physik, Seite 481.

Preussische Marineoffiziere fanden in demselben Jahre 1857
Juli 3 für Wangerooge ($53^\circ 47'$ N., $7^\circ 54'$ O. v. Greenwich) Missweisung $= 17^\circ 46'$ W.
Juli 13 für Bremerhafen ($53^\circ 32'$ N., $8^\circ 35'$ Ost) Missweisung $= 17^\circ 7'$ W.
Dazu für Elsfleth ($53^\circ 14'$ N., $8^\circ 28'$ Ost) Missweisung $= 16^\circ 58$ W.

Man hat jetzt

$$x = \frac{b - b_1 + a \; tang\,(A + z) - a_1 \; tang\,(A_1 + z)}{tang\,(A + z) - tang\,(A_1 + z)} \qquad 1)$$

und zur Controle auch

$$= \frac{b - b_2 + a \; tang\,(A + z) - a_2 \; tang\,(A_2 + z)}{tang\,(A + z) - tang\,(A_2 + z)} \qquad 2)$$

$$= \frac{b_1 - b_2 + a_1 \; tang\,(A_1 + z) - a_2 \; tang\,(A_2 + z)}{tang\,(A_1 + z) - tang\,(A_2 + z)} \qquad 3)$$

$A + z =$	$8^\circ 27' 59'',5$	*log tang*	9,17276	Zahl 0,14884
$a =$	1368,10	*log*	3,13612	
Zahl $=$	203,648	*log*	2,30888	
$A_1 + z =$	$88^\circ 33' 42'',5$	*log tang*	1,60022	Zahl 39,83091
$a_1 =$	2878,33	*log*	3,45914	
Zahl $=$	114647,37	*log*	5,05936	
$A_2 + z =$	$137^\circ 50' 30'',5$	*tang*	9,95685n	Zahl 0,90542n
$a_2 =$	5053,42	*log*	3,70359	
Zahl $=$	4575,50	*log*	3,66044.	

$u = -39,68207$ für 1)
$u = + \; 1,05426$ für 2)
$u = +40,73633$ für 3)

Also x aus 1)

$$\begin{array}{rrl}
b - b_1 = & - \quad 646{,}27 & \\
+ a . tang\, A + z = & + \quad 203{,}648 & \\
- a_1\, tang\, A_1 + z = & - \;114647{,}37 & \\
\hline
& - \;115090\ldots & log\ 5{,}06104 \\
u = & - \;39{,}68207 & log\ 1{,}59859 \\
\hline
x = & 2900{,}33 & log\ 3{,}46245
\end{array}$$

x aus 2)

$$\begin{array}{rrl}
b - b_2 = & - \;1721{,}33 & \\
+ a . tang\,(A + z) = & + \;203{,}648 & \\
- a_2\, tang\,(A_2 + z) = & + \;4575{,}50 & \\
\hline
& + \;3057{,}82 & log\ 3{,}48541 \\
u = & + \;1{,}05426 & log\ 0{,}02295 \\
\hline
x = & 2900{,}40 & log\ 3{,}46246.
\end{array}$$

Endlich x aus 3)

$$\begin{array}{rrl}
b - b_2 = & - \quad 1075{,}06 & \\
+ a_1\, tang\, A_1 + z = & + \;114647{,}37 & \\
- a_2\, tang\, A_2 + z = & + \quad 4575{,}50 & \\
\hline
& 118147{,}81 & log\ 5{,}07243 \\
u = & 40{,}73633 & log\ 1{,}60998 \\
\hline
x = & 2900{,}33 & log\ 3{,}46245.
\end{array}$$

Will man dem Unterschied in der letzten Decimale des Logarithmen Rechnung tragen, so ist der Mittelwerth von

$$x = 2900{,}35 \quad .$$

Man hat nun

$$\begin{aligned}
y &= b - (x - a)\, tang\,(A + z) && 1)\\
&= b_1 - (x - a_1)\, tang\,(A_1 + z) && 2)\\
&= b_2 - (x - a_2)\, tang\,(A_2 + z) && 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll}
x - a = & 1532{,}25 & log\ 3{,}18533 \\
log\ tang\,(A + z) = & & 9{,}17276 \\
\hline
+ & 228{,}08 & log\ 2{,}35809 \\
b = & 4631{,}48 & \\
\hline
y = & 4403{,}40 & \text{aus } 1)
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rll}
x - a_2 = & - \;2153{,}07 & log\ 3{,}33305\, n \\
log\ tang\,(A_2 + z) = & & 9{,}95685\, n \\
\hline
+ & 1949{,}41 & log\ 3{,}28990,\ +, \\
b_2 = & 6352{,}81 & \\
\hline
y = & 4403{,}40 & \text{aus } 3)
\end{array}$$

so dass also übereinstimmend

$$y = 4403{,}40$$

gefunden wird.

52. Das Pothenot'sche Problem, angewandt auf eine grössere Anzahl eingeschnittener Punkte, bei nicht orientiertem Azimuth.

Die vorstehenden Beobachtungen führen, wie man sieht, auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten, und ist deshalb von einer Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei ihnen keine Rede. Sind aber von einem Punkte aus mehr als drei Oerter eingeschnitten, so wird man zur Ausgleichung der Fehler wieder zur Methode der kleinsten Quadrate seine Zuflucht nehmen müssen. Das einzuschlagende Verfahren etc. wird man am besten aus einem grössern Beispiele ersehen können, wozu ich die sonst gleichgültigen Data der hannoverschen Landesvermessung entnehme, die mir zufällig bekannt sind. Die eingeschnittenen Punkte mögen P, P_1 etc., ihre nicht orientierten Azimuthe A, A_1 etc., die Abscissen a, a_1 etc., die Ordinaten wieder b, b_1 etc. heissen. Gegeben ist nun

Eingeschnittene Punkte.	Nicht orientiertes Azimuth.	Abscisse a.	Ordinate b.
P	$A = 195^0\,44'\,43''$	$a = -\ \ 427{,}8$	$b = +5813{,}5$
P_1	$A_1 = 224^0\,58'\,\ 5''$	$a_1 = -3497{,}0$	$b_1 = +\ \ 355{,}8$
P_2	$A_2 = 233^0\,27'\,44''$	$a_2 = -3667{,}8$	$b_2 = -2418{,}5$
P_3	$A_3 = 234^0\,14'\,57''$	$a_3 = -\ \ 753{,}3$	$b_3 = +3357{,}9$
P_4	$A_4 = 246^0\,27'\,45''$	$a_4 = -\ \ 710{,}7$	$b_4 = +\ \ 500{,}5$
P_5	$A_5 = 248^0\,35'\,35''$	$a_5 = -\ \ 556{,}5$	$b_5 = +\ \ 127{,}9$
P_6	$A_6 = 269^0\,59'\,52''$	$a_6 = +1986{,}5$	$b_6 = -\ \ 933{,}4$
P_7	$A_7 = 316^0\,40'\,29''$	$a_7 = +7439{,}1$	$b_7 = +1937{,}1$

Gefragt sind wiederum die wahren Azimuthe $A + z$, $A_1 + z$, etc. der Oerter P, P_1 etc. nebst den Coordinaten x, y des Standorts.

Als zu lösende Gleichungen ergeben sich zunächst

$$\frac{y - b}{x - a} = tang\ (A + z)$$

$$\frac{y - b_1}{x - a_1} = tang\ (A_1 + z) \text{ etc.}$$

53. Theils um ihre Form näher zu prüfen, und um im Allgemeinen den Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, welche ihre transcendente Form der Entwickelung der Unbekannten entgegenstellt, muss man erst Näherungswerthe für z, x und y suchen.

Ich wähle dazu die drei ersten Beobachtungen und erhalte so vorab ganz ähnliche Rechnung, wie sie das vorige Beispiel an die Hand gab. Es ist wiederum unter Berücksichtigung der veränderten Form der Gleichungen

$$tang\ \varphi = \frac{b - b_1}{a - a_1} \qquad tang\ \varphi_1 = \frac{b - b_2}{a - a_2}$$

$$m = \frac{b - b_1}{sin\ \varphi} \qquad m_1 = \frac{b - b_2}{sin\ \varphi_1}$$

$$tang\ \vartheta = \frac{m_1 \sin (A_1 - A)}{m \sin (A_2 - A)},$$ endlich wieder

$$tang\left(z + \frac{A_2 + A_1 - (\varphi + \varphi_1)}{2}\right) = cot(45 - \vartheta) tang\left(\frac{A_2 - A_1 + \varphi - \varphi_1}{2}\right)$$

Man hat jetzt

$$\begin{array}{rcll} b - b_1 & = & +\ 5457{,}7 & log\ 3{,}73701 \\ a - a_1 & = & +\ 3069{,}2 & log\ 3{,}48703 \\ \hline \varphi & = & 60^0 38' 52'' & log\,tang\ 0{,}24998 \\ & & & log\ sin\ \varphi\ 9{,}94033 \\ \hline & & & log\ m = 3{,}79668 \end{array}$$

φ im ersten Quadranten, weil Zähler und Nenner beide positiv.

$$\begin{array}{rcll} b - b_2 & = & +\ 8232{,}0 & log\ 3{,}91551 \\ a - a_2 & = & +\ 3240{,}0 & log\ 3{,}51055 \\ \hline \varphi_1 & = & 68^0 30' 58'' & log\,tang\ 0{,}40496 \\ & & & log\ sin\ \varphi_1\ 9{,}96873 \\ \hline & & & log\ m_1 = 3{,}94678 \\ A_1 - A & = & 29^0 13' 22'' & log\ sin\ 9{,}68860 \\ & & & colog\ m = 6{,}20332 \\ A_2 - A & = & 37^0 43' 1'' & log\ cosec\ 0{,}21342 \\ \hline \end{array}$$

$\vartheta = 48^0 25' 48''$ $log\ tang\ 0{,}05212$, ϑ im ersten Quadranten, weil Zähler und Nenner positiv.

$$\begin{array}{rcl} A_2 - A_1 & = & 8^0 29' 39'' \\ \varphi - \varphi_1 & = & -7^0 52'\ 6'' \\ \hline s & = & 0^0 37' 33'' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A_2 + A_1 & = & 458^0 25' 49'' \\ \varphi + \varphi_1 & = & 129^0\ 9' 50'' \\ \hline u & = & 329^0 15' 59'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} {}^1/_2 s & = & 0^0 18' 46'',5 & log\,tang\ 7{,}73731 \quad u/_2 = 164^0 37' 59'',5 \\ 45 - \vartheta & = & -3^0 25' 48'' & log\ cot\ 1{,}22231 n \\ \hline < & = & 174^0 47' 36'',7 & log\,tang\ 8{,}95962 n, \text{ also} \end{array}$$

$$z + 164^0 37' 59'',5 = 174^0 47' 36'',7$$

$$z = 10^0\ 9' 37''.$$

Jetzt noch $x = \dfrac{b - b_1 - a \; tang\,(A+z) + a_1 \; tang\,(A_1+z)}{tang\,(A_1+z) - tang\,(A+z)}.$

$$A = 195^\circ 44' 43''$$
$$A_1 = 224^\circ 58' \; 5''$$
$$z = 10^\circ \; 9' 37''$$

$A_1 + z = 235^\circ \; 7' 42''$ *log tang* 0,15685... Zahl 1,4350

$a_1 = -3497 \ldots$ *log* 3,54370

$a_1 \, tang\,(A_1+z) = -5018{,}2$ *log* 3,70055

$A + z = 205^\circ 54' 20''$ *log tang* 9,68637... Zahl 0,4857

$a = -427{,}8 \ldots$ *log* 2,63124

$a \, tang\,(A+z) = -207{,}78 \ldots$ *log* 2,31761

$tang\,(A_1+z) - tang\,(A+z) = 0{,}9493.$

$$x = \frac{5457{,}7 + 207{,}78 - 5018{,}2}{0{,}9493} = \frac{647{,}28}{0{,}9493}$$
$$= + \; 681{,}9.$$

Endlich $y = + \; 6352{,}5.$

Der Näherungswerth für $z = 10^\circ$ circa giebt Veranlassung zu einer wichtigen Bemerkung über die Form der oben angeführten ursprünglichen Gleichungen

$$\frac{y-b}{x-a} = tang\,(A+z) = \frac{sin\,(A+z)}{cos\,(A+z)}.$$

Nämlich da der Winkel $A + z$ im dritten Quadranten liegt, also $sin\,(A+z) = -$, $cos\,(A+z) = -$, so muss auch $arc\,tang\,(A+z)$ $= \dfrac{y-b}{x-a} =$ einem Bruch sein, dessen Zähler und Nenner beide negativ sind. Man schreibt also die ursprünglichen Gleichungen besser so

$$\frac{b-y}{a-x} = tang\,(A+z)$$

$$\frac{b_1-y}{a_1-x} = tang\,(A_1+z) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$arc\,tang\,\frac{b-y}{a-x} = A+z$$

$$arc\,tang\,\frac{b_1-y}{a_1-x} = A_1+z \quad \text{u. s. w.}$$

54. Man setze nun wieder, ähnlich wie früher

$$y = q + \eta$$
$$x = p + \xi$$
$$z = r + \Delta,$$

wo also q, p, r die eben gefundenen Näherungswerthe für y, x und z bedeuten, welche noch der resp. Correctionen η, ξ, Δ bedürfen, setze ferner

$$b - y = b - q - \eta = m - \eta$$
$$a - x = a - p - \xi = n - \xi,$$

so hat man die Gleichungen

$$arc\ tang\ \frac{m - \eta}{n - \xi} - (A + r) - \Delta = 0$$

$$arc\ tang\ \frac{m_1 - \eta}{n_1 - \xi} - (A_1 + r) - \Delta = 0 \text{ u. s. w.}$$

Eine kleine, doch nicht zu vernachlässigende Bequemlichkeit verschafft man sich, wenn man vor der Entwickelung des *arc tang* nach Potenzen von η und ξ die m und n erst berechnet. Man erhält

$$
\begin{array}{llll}
m = -\ \ 539{,}0 & \text{und} & n = -\ 1109{,}7 \\
m_1 = -\ 5996{,}7 & \text{„} & n_1 = -\ 4178{,}9 \\
m_2 = -\ 8771{,}0 & \text{„} & n_2 = -\ 4349{,}7 \\
m_3 = -\ 2994{,}6 & \text{„} & n_3 = -\ 1435{,}2 \\
m_4 = -\ 5852{,}0 & \text{„} & n_4 = -\ 1392{,}6 \\
m_5 = -\ 6224{,}6 & \text{„} & n_5 = -\ 1238{,}4 \\
m_6 = -\ 7285{,}9 & \text{„} & n_6 = +\ 1304{,}6 \\
m_7 = -\ 4415{,}4 & \text{„} & n_7 = +\ 6757{,}2.
\end{array}
$$

Weil nun aber hier fast alle m und n negativ werden, so thut man wohl, die unbequemen negativen Vorzeichen wegzuwerfen und die zu lösenden Gleichungen also zu schreiben:

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 539{,}0}{\xi + 1109{,}7} - 205^0 54' 20'' - \Delta = 0 \ldots . \ 1)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 5996{,}7}{\xi + 4178{,}9} - 235^0\ 7' 42'' - \Delta = 0 \ldots . \ 2)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 8771{,}0}{\xi + 4349{,}7} - 243^0 37' 21'' - \Delta = 0 \ldots . \ 3)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 2994{,}6}{\xi + 1435{,}2} - 244^0 24' 34'' - \Delta = 0 \ldots . \ 4)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 5852{,}0}{\xi + 1392{,}6} - 256^0 37' 22'' - \Delta = 0 \ldots . \ 5)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 6224{,}6}{\xi + 1238{,}4} - 258^0 45' 12'' - \Delta = 0 \ldots . \ 6)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 7285{,}9}{\xi - 1304{,}6} - 280^0\ 9' 29'' - \Delta = 0 \ldots . \ 7)$$

$$arc\ tang\ \frac{\eta + 4415{,}4}{\xi - 6757{,}2} - 326^0 50'\ 6'' - \Delta = 0 \ldots . \ 8)$$

Da nun wieder wie in dem Beispiel über die Coordinaten des Schlossthurms in Oldenburg (45)

$$arc\,tang\ \frac{\eta + m}{\xi + n} = arc\,tang\ \frac{m}{n} + \frac{n}{n^2 + m^2}\,\eta - \frac{m}{n^2 + m^2}\,\xi$$

wird, wenn man den *arctang* nach Taylor entwickelt, so nehmen die zu lösenden Gleichungen im Allgemeinen die Form an

$$\frac{n}{n^2 + m^2}\,\eta - \frac{m}{n^2 + m^2}\,\xi + arc\ tang\ \frac{m}{n} - (\text{Const.} - A + r) - \Delta = 0.$$

Die Berechnung der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$, sowie des $arc\ tang\ \frac{m}{n}$ — Const. zeigt folgende Zusammenstellung.

Es waren in	1)	2)	3)
die m =	$-$ 539,0	$-$ 5996,7	$-$ 8771,0
$log\, m$	2,73159	3,77791	3,94305
$log\, m^2$	5,46318	7,55582	7,88610
m^2 =	290520	3596 0000	7693 0000
Ferner die			
n	$-$ 1109,7	$-$ 4178,9	$-$ 4349,7
$log\, n$	3,04521	3,62106	3,63846
$log\, n^2$	6,09042	7,24212	7,27692
n^2 =	123 1460	1746 3200	1892 0000
Also			
$n^2 + m^2$	152 1980	5342 3200	9585 0000
dessen log	6,18241	7,72773	7,98159
$log \frac{n}{n^2 + m^2}$	6,86280 — 10	5,89333 — 10	5,65687 — 10
log 206264,8	5,31443	5,31443	u. s. w.
log Factor von η	2,17723	1,20776	0,97130
Factor von η	150,393	16,135	9,360
$log \frac{m}{n^2 + m^2}$	6,54918 — 10	6,05018	5,96146
log 206264,8	5,31443	5,31443	u. s. w.
log Factor von ξ	1,86361	1,36461	1,27589
Factor von ξ	73,048	23,153	18,875
$log \frac{m}{n}$	9,68639 — 10	0,15685	0,30459
= $log\, tang$	25° 54′ 24″	55° 7′ 43″	63° 37′ 21″

Da die m, m_1, m_2, m_3 etc. alle negativ, die n, n_1, die beiden letzten im vierten Quadranten, also

$arc\ tang \frac{m}{n}$	205° 54′ 24″	235° 7′ 43″	243° 37′ 21″
$-(A + r)$	205° 54′ 20″	235° 7′ 42″	243° 37′ 21″
Differenz	+ 4″	+ 1″	0

Die Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ in den vorstehenden Gleichungen sind bekanntlich von Hause aus Bogenmaass, durch Multiplication mit 206264,8 sind ihre Werthe in Winkelmaass

4)	5)	6)	7)	8)
— 2994,6	— 5852,0	— 6224,6	— 7285,9	— 4415,4
3,47634	3,76730	3,79411	3,86248	3,64497
7,95268	7,53460	7,58822	7,72496	7,28994
8967 6000	3424 5900	3874 5454	5308 4000	1949 6000
— 1435,2	— 1392,6	— 1238,4	+ 1304,6	+ 6757,2
3,15691	3,14383	3,09286	3,11548	3,82976
6,31382	6,28766	6,18572	6,23096	7,65952
205 9800	193 9350	153 3600	170 2000	4565 8000
1102 7400	3618 5250	4027 9054	5478 6000	6515 4000
7,04247	7,55853	7,60508	7,73867	7,81394
6,11444 — 10	5,58530 — 10	5,48778 — 10	5,37681 — 10	6,01582 — 10
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
1,42887	0,89973	0,80221	0,69124	1,33025
26,845	7,938	6,342	4,912	21,392
6,43387	6,20877	6,18903	6,12381	5,83103
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
1,74830	1,52320	1,50346	1,43824	1,14543
56,014	33,358	31,876	27,431	13,977
0,31943	0,62347	0,70125	0,74700	9,81521
64° 23′ 36″	76° 36′ 50″	78° 44′ 52″	79° 50′ 54″	33° 9′ 45″

n_2, n_3 auch bis auf n_6, n_7, so liegen die sechs ersten Winkel im dritten,

244° 23′ 36″	256° 36′ 50″	258° 44′ 52″	280° 9′ 6″	326° 50′ 15″
244° 24′ 34″	256° 37′ 22″	258° 45′ 12″	280° 9′ 29″	326° 50′ 6″
— 58″	— 32″	— 20″	— 23″	+ 9″

übergeführt, weil man dann die letzterhaltenen Differenzen ohne weitere Veränderung stehen lassen kann, und man auch das Δ nicht weiter durch Division mit 206 264,8 in Bogenmaass zu verwandeln braucht.

55. Bei der jetzt möglichen Aufstellung der Gleichungen für η, ξ, $\varDelta$ bedenke man, dass das Vorzeichen der Factoren $\frac{n}{n^2+m^2}$, $\frac{m}{n^2+m^2}$ von dem Vorzeichen des Zählers abhängig ist, sowie dass im Allgemeinen das zweite Glied ein negatives Vorzeichen hat. Man hat nun

$$\begin{aligned}
-150{,}393\,\eta + 73{,}048\,\xi - \varDelta + 4 &= 0\\
-16{,}135\,\eta + 23{,}153\,\xi - \varDelta + 1 &= 0\\
-9{,}360\,\eta + 18{,}875\,\xi - \varDelta + 0 &= 0\\
-26{,}845\,\eta + 56{,}014\,\xi - \varDelta - 58 &= 0\\
-7{,}938\,\eta + 33{,}358\,\xi - \varDelta - 32 &= 0\\
-6{,}342\,\eta + 31{,}876\,\xi - \varDelta - 20 &= 0\\
+4{,}912\,\eta + 27{,}431\,\xi - \varDelta - 23 &= 0\\
+21{,}392\,\eta + 13{,}977\,\xi - \varDelta + 9 &= 0
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man in bekannter Weise die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
24272\,\eta - 13114\,\xi + 191\,\varDelta + 1400 &= 0\\
13114\,\eta - 12466\,\xi - 278\,\varDelta - 5144 &= 0\\
191\,\eta - 278\,\xi + 8\,\varDelta + 119 &= 0
\end{aligned}$$

oder genauer

$$\begin{aligned}
24272{,}03\,\eta - 13114{,}09\,\xi + 190{,}71\,\varDelta - 1399{,}71 &= 0\\
-13114{,}09\,\eta + 12465{,}70\,\xi - 277{,}73\,\varDelta - 5143{,}56 &= 0\\
190{,}71\,\eta - 277{,}73\,\xi + 8\,\varDelta + 119 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus ihnen erhält man durch gewöhnliche Elimination

$$\begin{aligned}
\eta &= 0{,}785\\
\xi &= 2{,}165\\
\varDelta &= 41'',55,
\end{aligned}$$

so dass man bekommt

$$\begin{aligned}
x &= 682{,}652\\
y &= 6354{,}625\\
z &= 10^0 10' 18'',55.
\end{aligned}$$

56. Die Resultate sind nicht ganz zufriedenstellend; die grosse Correction für $\varDelta$ hat die Correctionen η und ξ unerwartet gross gemacht. Nun würde man, wenn man der Ermittelung des Näherungswerths für z nicht die drei ersten Beobachtungen, sondern die nahe auf einander folgenden Beobachtungen *sub num* 3 4, 5 zu Grunde gelegt hätte — die grossen Differenzen von 58″ und 32″ (für *arc tang* $\frac{m}{n}$ — Const.) machten schon das z verdächtig —